III. *Recherches sur les principaux Problèmes de l'Astronomie Nautique. Par Don* Josef de Mendoza y Rios, *F. R. S. Communicated by Sir* Joseph Banks, *Bart. K. B. P. R. S.*

Read December 22, 1796.

Dans les Recherches suivantes, je me suis proposé de considérer les principaux problèmes de l'Astronomie Nautique d'une manière générale, pour établir des formules qui embrassent tous les cas, et dont on puisse déduire les différentes méthodes propres à les résoudre avec plus ou moins d'avantages. Elles sont divisées en deux Parties.

Dans la Première Partie j'ai compris ce qui regarde la détermination de la latitude du lieu du vaisseau par deux hauteurs du soleil; ainsi que le calcul de l'angle horaire d'un astre par la hauteur observée, et celui de la hauteur par l'angle horaire.

Le sujet de la Seconde Partie est la réduction des distances de la lune au soleil, ou à une étoile, observées à la mer, pour déterminer la longitude. J'ai considéré séparément les solutions directes, et les méthodes d'approximation. Quant aux dernières, j'ai tâché aussi de donner des formules propres pour examiner et porter un jugement définitif sur tous les procédés de cette espèce dont on voudra prouver la fausseté ou la justesse, ou bien les dégrés d'exactitude qu'ils comportent.

Dans ces Recherches, ainsi que dans un ouvrage * que j'ai composé, avec un grand nombre de tables pour faciliter les calculs de l'Astronomie Nautique, j'ai employé les sinus-verses en

* L'impression de cet ouvrage est déjà très avancée.

les envisageant sous certaines rélations réciproques qui me paroîssent susceptibles de plusieurs applications utiles. Avant d'entrer en matière, il est donc à-propos de les expliquer, et de faire connoître les expressions dont je me suis servi pour les désigner. Les voici, (en supposant, comme nous le ferons par la suite, le sinus total $= 1$).

$$\text{sinus-verse } A = 1 - \cos. A = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\text{susinus-verse } A = 1 + \cos. A = \sin. v. (180^\circ - A) = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} A$$

$$\text{cosinus-verse } A = 1 - \sin. A = \sin. v. (90^\circ \sim A) = \text{susin. v.} (90^\circ + A) = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} (90^\circ \sim A) = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} (90^\circ + A)$$

$$\text{sucosinus-verse } A = 1 + \sin. A = \sin. v. (90^\circ + A) = \text{susin. v.} (90^\circ \sim A) = 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} (90^\circ + A) = 2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} (90^\circ \sim A)$$

PREMIÈRE PARTIE.

Trouver la Latitude du Vaisseau par deux Hauteurs du Soleil, et le Tems écoulé entre les Observations.

La latitude est l'élément le plus précieux de la Navigation. La facilité et l'exactitude avec lesquelles on peut la déduire de la hauteur méridienne du soleil, sont cause que les Pilotes se fient principalement à cette donnée pour la direction de leurs routes. Mais celà même fait, que, quand on manque l' observation du midi, l'incertitude qui y résulte est plus grande; et le danger devient imminent dans des circonstances critiques. Ainsi, depuis que les voyages longs et fréquens de la Navigation moderne donnèrent lieu à des recherches exactes pour traverser l'Océan avec sureté, on a tâché de trouver des régles propres pour déterminer la latitude par des observations prises hors du méridien; et le public possède à ce sujet un grand nombre de méthodes,* plus ou moins ingénieuses dans la théorie, mais dont la plupart sont restées tout à fait inutiles dans

* Le célèbre PIERRE NUNNEZ (ou NONIUS) s'occupa beaucoup des moyens de déterminer la latitude, et après avoir démontré la fausseté des régles publiées par PIERRE APPIAN (*Cosmographia*) et JACOB ZIEGLER (*Commentarium in secundum librum Naturalis Historiæ Plinii*) il donna différens problèmes de son invention, et entre eux celui qu'on résout par deux hauteurs, et l'arc d'horizon compris par les verticaux de l'astre (*De Arte atque Ratione Navigandi*, 1573; *De Observ. Regul. et Instrum. Geometr.* &c.). Je n'ai pas pu éclaircir celui qui le premier substitua au lieu du dernier élément, l'arc de l'équateur compris entre les horaires, ou bien l'intervalle de tems entre les observations; mais on trouve cette solution énoncée comme une chose connue quoique peu utile, dans le traité *De Globis et eorum Usu*, par ROBERT HUES. (Je n'ai jamais vu la première édition de ce livre; celles que je connois, outre les traductions en Anglois et en François, sont une *cum Annott.* J. ISAACI PONTANI, *Amst.* 1617; et une autre, *Oxon*, 1663.) Le procédé mentionné par HUES exige l'usage des globes. M. FACIO DUILLIER (*Navigation improved*, 1728,) expliqua avec assez de détail la même méthode par le calcul trigonométrique; et cependant M. PITOT la publia ensuite (*Mém. de l'Académie des Sciences de Paris*, 1736,) comme quelque chose d'important et de nouveau. Mr. R. GRAHAM imagina pour le même objet un appareil méchanique (*Philosoph. Transact.* 1734,); et M. DE MAUPERTUIS donna aussi une solution tirée des formules établies dans son *Astronomie Nautique* (*Probl. XII.*). Dans les ouvrages posterieurs on ne rencontre, pour la plupart, que les idées des auteurs que nous venons de citer. Au reste, voyez sur la détermination de la latitude par deux hauteurs et par d'autres procédés; *Comm. Acad. Imp. Sc. Petropolit.* 1729, Mémoires de DAN. BERNOUILLI, HERMAN, EULER, FR. CHRIST. MAYER, et W. KRAFFT. Id. 1779, Mémoire de M. LEXELL; *Nautical Almanack*, 1778, Appendice par M. LYONS; *L'Astronomie des Marins, par le* P. PE'ZENAS; *L'Astronomie de* M. DE LA LANDE; RÖSLERS *Handbuch der Practic. Astronomie*; *La Trigonométrie rectiligne et sphérique, par* M. CAGNOLI; *Berlin. Astronom. Jahrbücher*, 1787, 1789, 1790, Mémoires de M. M. HENERT, GRAF PLAATEN, et SCHUBERT; *Allgemeine Wörterbuch der Marine*, par RÖDING; *Sammlung Astronom. Abhandlungen*, par KÄSTNER; *Elements of Navigation*, by ROBERTSON; *Traité de Navigation de* BOUGUER, *par* LA CAILLE; *Opuscules Mathématiques de* M. D'ALEMBERT, IV. p. 357; *Cours de Mathématiques*,

la pratique. La seule qui ait été adoptée par les navigateurs assez généralement est celle de M. DOUWES,* qui mérita pour sa solution une récompense du Bureau des Longitudes de la Grande Bretagne. Cette méthode, pourtant, est sujette à quelques inconvéniens; entre autres celui d'exiger dans les opérations l'usage combiné des nombres naturels et artificiels. Je me suis proposé de trouver des moyens plus simples et plus généraux pour calculer la latitude; ce qui m'a engagé dans des recherches, dont je me contenterai de donner ici celles qui me paroîssent remplir quelque but utile.

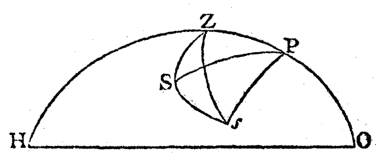
par M. BE'ZOUT, VI. *Navigation*; *Voyage de la Flore, par* M. M. DE VERDUN, DE BORDA, et PINGRE', I.; *Déscription et Usage du Cercle de Réflexion, par* M. DE BORDA; *Dictionnaire Encyclopédique des Mathématiques,* II.; *Traité Analytique des Mouvements apparens des Corps Célestes, par* M. DU SEJOUR, &c.

* M. CORNELIUS DOUWES expliqua sa méthode avec beaucoup de détails théoriques et pratiques dans les *Actes de l' Académie de Haarlem,* I. 1754. Ce Mémoire est très intéressant, mais il est resté presque tout à fait inconnu au reste de l'Europe, à cause de la langue du pays où il fut écrit. Je me propose de publier la traduction en François. Les tables de M. DOUWES pour faciliter sa méthode suivirent de très près le précédent ouvrage; et c'est d'après un exemplaire de cette édition que HARRISON fit la sienne en 1759, à Londres. Le Dr. PEMBERTON, à la vue de ces tables, dont il paroit avoir ignoré l'auteur, trouva la théorie et l'inséra dans les *Transactions Philosophiques,* 1760. La connoîssance qu'on a des principes du professeur Hollandois est pour la plupart dérivée de ce Mémoire. Sur cette méthode, et sur quelques changements qu'on y a proposé ou fait, ainsi que sur les tables plus étendues qu'on a calculé pour en faciliter l'usage, voyez d'ailleurs—*The British Mariner's Guide, by* Mr. MASKELYNE; *Nautical Almanack,* 1771, Appendice par l'Amiral CAMPBELL; *Nautical Almanack,* 1781, Appendice par Mr. EDWARDS; *Requisite Tables,* 1781; *Le Guide du Navigateur, par* M. LEVÊQUE; *Sammlung Astronomischer Abbandlungen,* 1793, par M. BODE, Mémoire de Mr. NIEUWELAND; *Verhandeling over het bepaalen der Lengte op Zee, Amst.* 1789, par M. M. VAN SWINDEN, NIEUWELAND, et VAN KEULEN; *L'Astronomie de* M. DE LA LANDE; *Tratado de Navegacion, por* Don JOSEF DE MENDOZA RIOS, 1787; *Connoîssance des Tems,* 1793, Mémoire de M. DE MENDOZA; *Nautical Almanacks,* 1797—1800, Appendice par Mr. BRINKLEY, &c.

Nous supposerons, pour la Première Partie de ces Recherches, la plus grande hauteur du soleil $= a$, l'angle horaire correspondant $= b$, l'azimuth correspondant $= e$, la déclinaison correspondante $= d$, ou la distance au pole élevé $=$ D, et l la latitude du lieu où l'on a observé cette hauteur; la petite hauteur du soleil $= a'$, et les autres éléments rélatifs à cette observation $= b'$, e', d', D$'$, l'. Nous représenterons aussi l'angle horaire, moyen entre b et b', par m, et la différence entre b et b' par t.

Méthode directe.

Soit H O l'horizon, H Z P O le méridien, Z le zénith, P le pole élevé, et S, *s* les lieux du soleil aux instants des observations, que nous supposerons faites dans le même lieu.



Voici le procédé qu'on prescrit ordinairement pour faire le calcul par la Trigonométrie Sphérique.

Dans le triangle S P *s* on connoit l'angle S P *s* qu'on déduit de l'intervalle, et les deux cotés S P, *s* P qui sont les distances du soleil au pole élevé; dont on pourra conclure S *s*, et S *s* P, ou *s* S P. Avec S *s* et les compléments des hauteurs Z S, Z *s* on calculera Z *s* S ou Z S *s*. La comparaison entre S *s* P et Z *s* S, ou entre *s* S P et Z S *s* donnera Z *s* P ou Z S P. Le premier de ces deux angles, et les cotés Z *s*, P *s* suffisent pour résoudre le triangle Z *s* P; ou bien, on pourra résoudre le triangle Z S P à l'aide de l'autre angle Z S P et de Z S, P S; en concluant ainsi le complément de la latitude Z P.

Tâchons d'établir des formules pour abrégér et simplifier ce calcul.

Dans le triangle S P *s* que je considérérai comme isoscèle, en supposant la déclinaison constante,

on a $$\cos. \, Ss = \cos. \, t \sin.^2 D + \cos.^2 D.$$
d'où l'on déduit
$$1 - \sin. v. \, Ss = \cos. \, t \sin.^2 D + \cos.^2 D.$$
$$\sin. v. \, Ss = \sin.^2 D - \cos. \, t \sin.^2 D.$$
$$\sin. v. \, Ss = \sin.^2 D \sin. v. \, t.$$
Formule propre pour le calcul de Ss par les sinus-verses.

En substituant $2 \sin.^2 \frac{1}{2} Ss = \sin. v. \, Ss$, et $2 \sin.^2 \frac{1}{2} t =$ $\sin. v. \, t$, on déduit, pour le calcul par les sinus
$$\sin. \tfrac{1}{2} Ss = \sin. D \sin. \tfrac{1}{2} t.$$

Dans le même triangle on a
$$\cos. \, SsP = \frac{\cos. D - \cos. Ss \cos. D}{\sin. Ss \sin. D}$$
par conséquent
$$\text{susin. v. } SsP - 1 = \frac{\cos. D - \cos. Ss \cos. D}{\sin. Ss \sin. D}.$$
$$\text{susin. v. } SsP = \frac{\cos. D - \cos. Ss \cos. D + \sin. Ss \sin. D}{\sin. Ss \sin. D}$$
$$\text{susin. v. } SsP = \frac{\cos. D - \cos. (Ss + D)}{\sin. Ss \sin. D}$$
$$\text{susin. v. } SsP = \frac{2 \sin. (\frac{1}{2} Ss + D) \sin. \frac{1}{2} Ss}{\sin. Ss \sin. D}$$
et en substituant $\sin \frac{1}{2} Ss = \sin. D \sin. \frac{1}{2} t$
il résultera
$$\text{susin. v. } SsP = \frac{2 \sin. (\frac{1}{2} Ss + D) \sin. \frac{1}{2} t}{\sin. Ss}$$
Formule pour calculer SsP par les sinus-verses, et les double-sinus.

Pour le calcul par les sinus on déduit
$$\cos. \tfrac{1}{2} SsP = \sqrt{\frac{\sin. (\frac{1}{2} Ss + D) \sin. \frac{1}{2} t}{\sin. Ss}}$$
On pourroit trouver aussi
$$\sin. v. \, SsP = \frac{2 \sin. (\frac{1}{2} Ss \sim D) \sin. \frac{1}{2} t}{\sin. Ss}$$
et $$\sin. \tfrac{1}{2} SsP = \sqrt{\frac{\sin. (\frac{1}{2} Ss \sim D) \sin. \frac{1}{2} t}{\sin. Ss}}$$

Dans le triangle Z S s on a

$$\cos.\ S\,s\,Z = \frac{\sin.\ a - \cos.\ S\,s\ \sin.\ a'}{\sin.\ S\,s\ \cos.\ a'}$$

$$1 - \sin.v.\ S\,s\,Z = \frac{\sin.\ a - \cos.\ S\,s\ \sin.\ a'}{\sin.\ S\,s\ \cos.\ a'}$$

$$\sin.\ v.\ S\,s\,Z = \frac{\sin.\ (S\,s + a') - \sin.\ a}{\sin.\ S\,s\ \cos.\ a'}$$

$$\sin.\ v.\ S\,s\,Z = \frac{2\cos.\ \tfrac{1}{2}\,(S\,s + a' + a)\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\,(S\,s + a' - a)}{\sin.\ S\,s\ \cos.\ a'}$$

Formule pour calculer S s Z par les sinus-verses.

Pour le calcul par les sinus on déduit

$$\sin.\ \tfrac{1}{2}\,S\,s\,Z = \sqrt{\frac{\cos.\ \tfrac{1}{2}\,(S\,s + a' + a)\ \sin.\ \tfrac{1}{2}\,(S\,s + a' - a)}{\sin.\ S\,s\ \cos.\ a'}}$$

On pourroit trouver aussi

$$\text{susin.}\ v.\ S\,s\,Z = \frac{2\sin.\ \tfrac{1}{2}\,(S\,s + a - a')\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,\big((S\,s - a') \sim a\big)}{\sin.\ S\,s\ \cos.\ a'}$$

$$\text{et}\quad \cos.\ \tfrac{1}{2}\,S\,s\,Z = \sqrt{\frac{\sin.\ \tfrac{1}{2}\,(S\,s + a - a')\ \cos.\ \tfrac{1}{2}\,\big((S\,s - a') \sim a\big)}{\sin.\ S\,s\ \cos.\ a'}}$$

Plusieurs auteurs de Trigonométrie Sphérique supposent que l'angle Z s P est toujours égal à la différence entre S s P, et S s Z; mais cette régle générale n'est pas exacte. Le vertical Z s peut tomber à l'autre coté de S s relativement au pole élevé; ce qui a lieu quand l'astre dans sa révolution diurne passe entre le zénith et le pole élevé. On doit prendre alors la somme, et non pas la différence des angles ci-dessus, pour avoir celui qu'on cherche.

L'angle Z S P peut être aussi égal au complément à 360° de la somme de s S P, et Z S s; et l'attention à cette circonstance seroit nécessaire dans le cas où l'on feroit le calcul par les angles en S.

Après avoir déterminé l'angle Z s P, on a

$$\sin.\ l = \cos.\ Z\,s\,P\ \cos.\ a'\ \sin.\ D + \sin.\ a'\ \cos.\ D$$

$$\sin.\ l = \sin.\ a'\cos.\ D + \cos.\ a'\ \sin.\ D - \sin.v.\ Z\,s\,P\ \cos.\ a'\ \cos.\ d$$

$$\sin. l = \sin. (D + a') - \sin.v.\ Z s P \cos. a' \cos. d$$

$$1 + \sin. l = 1 + \sin. (D + a') - \sin.v.\ Z s P \cos. a' \cos. d$$

$$\text{sucos.v.}\ l = \text{sucos.v.}\ (D + a') - \sin.v.\ Z s P \cos. a' \cos. d$$

$$\text{sucos.v.}\ l = \text{sucos.v.}\ (D + a') \left(1 - \frac{\sin.v.\ Z s P \cos. a' \cos. d}{\text{sucos.v.}\ (D + a')}\right).$$

Formule pour déterminer finalement l par les sinus-verses; car on voit, qu'en faisant $\frac{\sin.v.\ Z s P \cos. a' \cos. d}{\text{sucos.v.}\ (D + a')} = \sin.v.\ N$, on aura $\text{sucos.v.}\ l = \text{sucos.v.}\ (D + a') \cos. N$.

En substituant dans la formule précédente $2 \sin.^2 \frac{1}{2} (90 + l) = \text{sucos.v.}\ l$, $2 \sin.^2 \frac{1}{2} Z s P = \sin.v.\ Z s P$, et $2 \sin.^2 \frac{1}{2} (90° + D + a') = \text{sucos.v.}\ (D + a')$, il résultera, pour le calcul de l par les sinus,

$$\sin. \tfrac{1}{2} (90° + l) = \sin. \tfrac{1}{2} (90° + D + a') \sqrt{1 - \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} Z s P \cos. a' \cos. d}{\sin.^2 \frac{1}{2} (90° + D + a')}}$$

Par où l'on voit, qu'en faisant $\frac{\sin. \frac{1}{2} Z s P \sqrt{\cos. a' \cos. d}}{\sin. \frac{1}{2} (90° + D + a')} = \sin. N$ on aura $\sin. \frac{1}{2} (90° + l) = \sin. \frac{1}{2} (90° + D + a') \cos. N$.

On pourroit aussi déduire

$$\cos.v.\ l = \cos.v.\ (D + a') \left(1 + \frac{\sin.v.\ Z s P \cos. a' \cos. d}{\cos.v.\ (D + a')}\right)$$

pour faire $\frac{\sin.v.\ Z s P \cos. a' \cos. d}{\cos.v.\ (D + a')} = \cos. N$, et avoir $\cos.v.\ l = \cos.v.\ (D + a')\ \text{susin.v.}\ N$.

Aussi,

$$\cos. \tfrac{1}{2} (90° + l) = \cos. \tfrac{1}{2} (90° + D + a') \sqrt{1 + \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} Z s P \cos. a' \cos. d}{\cos.^2 \frac{1}{2} (90° + D + a')}}$$

où, en faisant $\frac{\sin. Z s P \sqrt{\cos. a' \cos. d}}{\cos. \frac{1}{2} (90° + D + a')} = \tan. N$, on a

$$\cos. \tfrac{1}{2} (90° + l) = \frac{\cos. \frac{1}{2} (90° + D + a')}{\cos. N}.$$

Nous examinerons à présent l'erreur qui résulte dans la latitude de celles qu'on peut commettre dans les élémens du calcul.

Supposons premièrement une erreur δt dans l'intervalle. Les analogies différentielles donnent, en supposant l'angle horaire et la latitude variables,

$$\delta h = \frac{\delta l\,(\tan.\,d - \tan.\,l\cos.\,h)}{\sin.\,h}$$

et $$\delta h' = \frac{\delta l\,\tan.\,d - \tan.\,l.\cos.\,h'}{\sin.\,h'}$$

On aura donc

$$\delta t = \delta h' - \delta h = \delta l\left(\tan.\,l\,(\cot.\,h - \cot.\,h') - \frac{\tan.\,d\,(\sin.\,h' - \sin.\,h)}{\sin.\,h\,\sin.\,h'}\right)$$

Par conséquent $\delta l = \dfrac{\delta t\,\sin.\,h\,\sin.\,h'}{\tan.\,l\sin.\,t - 2\tan.\,d\cos.\,m\sin.\,\frac{1}{2}t}$;

ou bien $\delta l = \dfrac{\delta t}{\tan.\,l\,(\cot.\,h - \cot.\,h') - \tan.\,d\,(\text{cosec.}\,h - \text{cosec.}\,h')}$.

En supposant une erreur δa dans la grande hauteur, on a $-\delta t = \delta h = \dfrac{\delta a\cos.\,a}{\cos.\,d\cos.\,l\sin.\,h}$; ce qui, étant substitué dans l'équation précédente, donne

$$\delta l = -\frac{\delta a\cos.\,a\sin.\,h'}{\cos.\,d\sin.\,l\sin.\,t - 2\sin.\,d\cos.\,l\cos.\,m\sin.\,\frac{1}{2}t}$$

et $$\delta l = -\frac{\delta a\cos.\,a\sin.\,h'}{\cos.\,d\sin.\,l\sin t - \sin.\,d\cos.\,l\,(\sin.\,h' - \sin.\,h)}$$

Pour l'erreur de la petite hauteur on auroit aussi $\delta t = \delta h = \dfrac{\delta a'\cos.\,a'}{\cos.\,d\cos.\,l\sin.\,h'}$; d'où l'on déduit

$$\delta l = \frac{\delta a'\cos.\,a'\sin.\,h}{\cos.\,d\sin.\,l\sin.\,t - 2\sin.\,d\cos.\,l\cos.\,m\sin.\,\frac{1}{2}t}$$

et $$\delta l = \frac{\delta a'\cos.\,a'\sin.\,h}{\cos.\,d\sin.\,l\sin.\,t - \sin.\,d\cos.\,l\,(\sin.\,h' - \sin.\,h)}$$

Méthode indirecte, en déduisant premièrement l'Angle horaire moyen.

La Trigonométrie Sphérique donne $\cos.\,h = \dfrac{\sin.\,a - \sin.\,d\sin.\,l}{\cos.\,d\cos.\,l}$ et $\cos.\,h' = \dfrac{\sin.\,a' - \sin.\,d'\sin.\,l'}{\cos.\,d'\cos.\,l'}$. Par conséquent

$$\cos. h - \cos. h' = 2 \sin. m \sin. \tfrac{1}{2} t = \left\{ \frac{\begin{array}{l} \sin. a \cos. d' \cos. l' - \sin. a' \cos. d \cos. l \\ - \sin. d \cos. d' \sin. l \cos. l' \\ + \cos. d \sin. d' \cos. l \sin. l' \end{array}}{\cos. d \cos. d' \cos. l \cos. l'} \right.,$$

et

$$\sin. m = \frac{\sin. a \cos. d' \cos. l' - \sin. a' \cos. d \cos. l - \sin. d \cos. d' \sin. l \cos. l' + \cos. d \sin. d' \cos. l \sin. l'}{2 \cos. d \cos. d' \cos. l \cos. l' \sin. \frac{1}{2} t}$$

Voici l'expression générale de l'horaire moyen m dans tous les cas du problème. Quand les observations ont été faites dans le même lieu on a $l = l'$, et en supposant la déclinaison constante dans l'intervalle $d = d'$, ce qui réduit la formule alors à $\sin. m = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d \cos. l \sin. \frac{1}{2} t}$. Les circonstances dans la pratique sont presque toujours différentes; mais, l'intervalle n'étant que de quelques heures, la différence entre l et l' ne peut jamais être grande, et celle entre d et d' doit être encore moins considérable. Nous pourrons donc transformer la formule générale, en supposant ces différences très petites, pour déduire des expressions propres pour le calcul.

Faisons $l = l' + \Delta l$, et $d = d' + \Delta d$; et l'on aura

$$\cos. d' = \cos. d + \Delta d \sin. d$$
$$\sin. d' = \sin. d - \Delta d \cos. d$$
$$\cos. l' = \cos. l + \Delta l \sin. l$$
$$\sin. l' = \sin. l - \Delta l \cos. l$$

Substituons y ces expressions, en négligeant les produits des deux dimensions de Δl, Δd, et nous aurons

$$\sin. m = \left\{ \frac{\begin{array}{l} (\sin. a - \sin. a') \cos. d \cos. l + \Delta l (\sin. a \cos. d \sin. l - \sin. d \cos. d) \\ + \Delta d (\sin. a \sin. d \cos. l - \sin. l \cos. l) \end{array}}{2 \cos. d \cos. l \sin. \frac{1}{2} t (\cos. d \cos. l + \Delta l \cos. d \sin. l + \Delta d \sin. d \cos. l)} \right.$$

Représentons la latitude supposée du lieu où l'on observa la plus grande hauteur par l'', et faisons $l = l'' + \delta l''$, en supposant toujours que la différence $\delta l''$ est petite. Si l'on calcule un angle horaire moyen M avec cette latitude, on aura

$$\sin. M = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d \cos. l'' \sin. \frac{1}{2} t} = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d \cos. l \sin. \frac{1}{2} t + 2 \delta l'' \cos. d \sin. l \sin. \frac{1}{2} t}$$

Par conséquent, $\sin. m = \sin. M +$ . . . .

$$\frac{\Delta l (\cos. d \sin. l \sin. a' - \sin. d \cos. d) + \Delta d (\sin. d \cos. l \sin. a' - \sin. l \cos. l) + \delta l'' \cos. d \sin. l (\sin. a - \sin. a')}{2 \cos. d \cos. l \sin. \frac{1}{2} t (\cos. d \cos. l + \Delta l \cos. d \sin. l + \Delta d \sin. d \cos. l + \delta l'' \cos. d \sin. l)}$$

et, à très peu près,

$$m = M + \begin{cases} \dfrac{\Delta l \ (\sin. l'' \sin. a' - \sin. d)}{2 \cos. d \cos.^2 l'' \cos. M \sin. \frac{1}{2} t} + \dfrac{\Delta d \ (\sin. d \sin. a' - \sin. l'')}{2 \cos.^2 d \cos. l'' \cos. M \sin. \frac{1}{2} t} \\ + \dfrac{\delta l'' \sin. l'' (\sin. a - \sin. a')}{2 \cos.^2 d \cos.^2 l'' \cos. M \sin. \frac{1}{2} t} \end{cases}$$

Substituant $\sin. a' = \cos. h' \cos. d \cos. l'' + \sin. d \sin. l''$ dans le second et le troisième membre de la droite, et $\sin. M = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d \cos. l'' \sin. \frac{1}{2} t}$ dans le dernier, il résultera

$$m = M + \begin{cases} \dfrac{\Delta l \ (\cos h' \tan. l'' - \tan. d)}{2 \cos. M \sin. \frac{1}{2} t} + \dfrac{\Delta d \ (\cos. h' \tan. d - \tan. l'')}{2 \cos. M \sin. \frac{1}{2} t} \\ + \delta l'' \tan. l'' \tan. M. \end{cases}$$

Formule qui donne la valeur de l'horaire moyen pour le calcul relatif au lieu de la plus grande hauteur.

Si l'on suppose $l' = l + \Delta l$, et $d' = d + \Delta d$, on aura, en substituant comme nous avons fait auparavant,

$$\sin. m = \begin{cases} \dfrac{(\sin. a - \sin. a') \cos. d' \cos. l' + \Delta l (\sin. d' \cos. d' - \sin. a' \cos. d' \sin. l') + \Delta d (\sin. l' \cos. l' - \sin. a' \sin. d' \cos. l')}{2 \cos. d' \cos. l' \sin. \frac{1}{2} t (\cos. d' \cos. l' + \Delta l \cos. d' \sin. l' + \Delta d \sin. d' \cos. l')} \end{cases}$$

En représentant par l''' la latitude estimée du lieu où on a observé la plus petite hauteur, et en faisant $l''' + \delta l''' = l'$, et $\sin. M' = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d' \cos. l''' \sin. \frac{1}{2} t}$, ou, ce qui revient au même,

$$\sin. M = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d' \cos. l' \sin. \frac{1}{2} t + 2 \delta l''' \cos. d' \sin. l' \sin. \frac{1}{2} t}$$

on aura $\sin. m = \sin. M' +$ . . . .

$$\frac{\Delta l (\sin. d' \cos. d' - \sin. a \cos. d' \sin. l') + \Delta d (\sin. l' \cos. l' - \sin. a \sin. d' \cos. l') + \delta l''' \cos. d' \sin. l' (\sin. a - \sin. a')}{2 \cos. d' \cos. l' \sin. \frac{1}{2} t (\Delta l \cos. d' \sin. l' + \Delta d \sin. d' \cos. l' + \delta l''' \cos. d' \sin. l')}$$

et, à très peu près,

$$m = \mathrm{M}' + \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\Delta l\,(\sin. d' - \sin. l''' \sin. a)}{2 \cos. d' \cos.^2 l''' \cos. \mathrm{M}' \sin. \frac{1}{2} t} + \dfrac{\Delta d\,(\sin. l''' - \sin. d' \sin. a)}{2 \cos.^2 d' \cos. l''' \cos. \mathrm{M}' \sin. \frac{1}{2} t} \\ + \dfrac{\delta l''' \sin. l''' (\sin. a - \sin. a')}{2 \cos. d' \cos.^2 l''' \sin. \frac{1}{2} t} \end{array} \right.$$

Par où, en substituant $\sin. a = \cos. b \cos. d' \cos. l''' + \sin. d' \sin. l'''$, et $\sin. \mathrm{M}' = \dfrac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d' \cos. l''' \sin. \frac{1}{2} t}$, il résulte

$$m = \mathrm{M}' + \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\Delta l\,(\tan. d' - \cos. b \tan. l''')}{2 \cos. \mathrm{M}' \sin. \frac{1}{2} t} + \dfrac{\Delta d\,(\tan. l''' - \cos. b \tan. d')}{2 \cos. \mathrm{M}' \sin. \frac{1}{2} t} \\ + \delta l''' \tan. l''' \tan. \mathrm{M}'. \end{array} \right.$$

Formule de l'horaire moyen pour le calcul relatif au lieu de la plus petite hauteur.

En considérant ces formules, on voit facilement la manière dont on doit procéder pour obtenir l'horaire moyen. De l'intervalle, et de la différence en longitude entre les lieux des observations, on déduira t. Avec cette quantité, et les données du problème, on trouvera M par l'expression $\dfrac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d \cos. l'' \sin. \frac{1}{2} t}$, si l'on veut faire le calcul relativement au lieu de la plus grande hauteur; ou bien on trouvera M′ par l'expression $\dfrac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d' \cos. l''' \sin. \frac{1}{2} t}$ pour faire le calcul relativement au lieu de la plus petite hauteur. Après quoi, il faudra appliquer à M, ou M′, les équations convenables pour avoir m.

Les variations de la latitude, et de la déclinaison, étant connues par la nature du problème, on pourroit calculer par les expressions ci-dessus les équations qui en dérivent; mais l'horaire moyen résteroit toujours affecté de l'erreur qui dépend de $\delta l''$, ou $\delta l'''$, dont le dégagement n'est pas praticable jusqu'à la conclusion de la latitude. Il me paroit donc préférable de laisser toutes les corrections pour le dernier résultàt.

Mr. Douwes a employé la formule $\sin. M = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \cos. d \cos. l \sin. \frac{1}{2} t}$ pour sa méthode, et le Dr. Pemberton l'a mise sous la forme $\sin. M = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a + a') \sin. \frac{1}{2}(a' - a)}{\cos. d \cos. l \sin. \frac{1}{2} t}$, qui est propre pour le calcul par les logarithmes, sans le secours des sinus naturels.

Après avoir déterminé M, ou M′, on aura (en représentant le petit horaire approché par H, et le grand horaire approché par H′), $H = M - \frac{1}{2} t$, et $H' = M' + \frac{1}{2} t$.

Avec un horaire, et la hauteur et la déclinaison correspondantes, il seroit facile de calculer la latitude par les régles ordinaires de la Trigonométrie Sphérique, mais la solution du problème exigéroit alors des distinctions des cas qui la rendroient complexe, et que l'on doit éviter autant que possible. Nous chercherons, donc, des formules pour arriver au résultat par un procédé plus simple, et nous nous proposerons de déterminer la distance méridienne du soleil au zénith $d \sim l$; car cette distance une fois connue, la conclusion de la latitude est très facile.

Reprenons la formule $\cos. h = \frac{\sin. a - \sin. d \sin. l}{\cos. d \cos. l}$, et nous aurons $\cos. h \cos. d \cos. l + \sin. d \sin. l = \sin. a$, d'où (en substituant $1 - \text{sin.v.}\, h = \cos. h$), on déduit

$$\cos. d \cos. l + \sin. d \sin. l = \sin. a + \text{sin.v.}\, h \cos. d \cos. l,$$

et par conséquent,

$$\cos. (d \sim l) = \sin. a + \text{sin.v.}\, h \cos. d \cos. l$$

ou (en représentant par L la latitude qui résulte du calcul),*

$$\cos. (d \sim L) = \sin. a + \text{sin.v. H} \cos. d \cos. l''.$$

* En substituant dans $\cos. h \cos. d \cos. l + \sin. d \sin. l = \sin. a$, l'expression $\cos. h = \text{susin.v.}\, h - 1$, on déduiroit $\text{susin.v.}\, h \cos. d \cos. l - \cos. d \cos. l + \sin. d \sin. l = \sin. a$, et par conséquent $\cos. (d + l) = \text{susin.v.}\, h \cos. d \cos. l - \sin. a$. Je laisse pour une autre occasion le détail des applications qu'on pourroit faire de cette formule.

De cette équation on tire

$$1 - \cos.\,(d \sim L) = 1 - \sin.\,a - \sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''$$

$$\sin.\,v.\,(d \sim L) = \cos.\,v.\,a - \sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''$$

$$\sin.\,v.\,(d \sim L) = \cos.\,v.\,a \left(1 - \frac{\sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''}{\cos.\,v.\,a}\right).$$

Première formule, pour calculer la distance méridienne du soleil au zénith $d \sim L$, par les sinus-verses. En faisant donc $\frac{\sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''}{\cos.\,v.\,a} = \cos.\,N$, on aura

$$\sin.\,v.\,(d \sim L) = \cos.\,v.\,a \sin.\,v.\,N.$$

De l'équation $\cos.\,(d \sim L) = \sin.\,a + \sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''$ on tire aussi

$$1 + \cos.\,(d \sim L) = 1 + \sin.\,a + \sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''$$

$$\text{susin.}\,v.\,(d \sim L) = \text{sucos.}\,v.\,a + \sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''$$

$$\text{susin.}\,v.\,(d \sim L) = \text{sucos.}\,v.\,a \left(1 + \frac{\sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''}{\text{sucos.}\,v.\,a}\right)$$

Seconde formule, pour faire le calcul, par les sinus-verses. En faisant $\frac{\sin.\,v.\,H \cos.\,d \cos.\,l''}{\text{sucos.}\,v.\,a} = \cos.\,N$, on aura donc,

$$\text{susin.}\,v.\,(d \sim L) = \text{sucos.}\,v.\,a\ \text{susin.}\,v.\,N.$$

Comme l'arc $d \sim L$ est toujours moindre que 90°, ... $\sin.\,v.\,(d \sim L)$ sera sans exception plus petit que $\text{susin.}\,v.\,(d \sim L)$; et, par conséquent, la première formule préférable à la seconde.

De la première formule, on tire

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}\,(d \sim L) = \cos.^2 \tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a) \left(1 - \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} H \cos.\,d \cos.\,l''}{\cos.^2 \frac{1}{2}\,(90^\circ + a)}\right)$$

et $$\sin.\,\tfrac{1}{2}\,(d \sim L) = \cos.\,\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a) \sqrt{1 - \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} H \cos.\,d \cos.\,l''}{\cos.^2 \frac{1}{2}\,(90^\circ + a)}}$$

Troisième formule. Au moyen de la quelle on pourra calculer $d \sim L$ par les sinus; car en faisant $\frac{\sin.\,\frac{1}{2} H \sqrt{\cos.\,d \cos.\,l''}}{\cos.\,\frac{1}{2}\,(90^\circ + a)} = \sin.\,N$, on aura $\sin \tfrac{1}{2}\,(d \sim L) = \cos.\,\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a) \cos.\,N.$

De la seconde formule on tire

$$\cos.^2\tfrac{1}{2}\,(d \sim \mathrm{L}) = \sin.^2\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a)\left(1 + \frac{\sin.^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{H}\cos.\,d\cos.\,l''}{\sin.^2\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a)}\right)$$

et $\cos.\tfrac{1}{2}\,(d \sim \mathrm{L}) = \sin.\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a)\sqrt{1 + \frac{\sin.^2\tfrac{1}{2}\,\mathrm{H}\cos.\,d\cos.\,l''}{\sin.^2\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a)}}$

Quatrième formule. A l'aide de laquelle on pourra calculer $d \sim \mathrm{L}$ par les sinus et les tangentes; car, en faisant $\frac{\sin.\tfrac{1}{2}\,\mathrm{H}\sqrt{\cos\,d\cos.\,l''}}{\sin.\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a)} = \tan.\,\mathrm{N}$, on aura $\cos.\tfrac{1}{2}\,(d \sim \mathrm{L}) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a)}{\cos.\,\mathrm{N}}$.

On doit remarquer que $\sin.\tfrac{1}{2}\,(d \sim \mathrm{L})$ est toujours moindre que $\cos.\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a)$, et que $\cos.\tfrac{1}{2}\,(d \sim \mathrm{L})$ est toujours plus grand que $\sin.\tfrac{1}{2}\,(90^\circ + a)$; ce qui rend la troisième formule plus exacte pour le calcul que la formule quatrième. Cependant, comme, en faisant usage des logarithmes sinus et tangentes seulement, le total des opérations est un peu plus court par le moyen de la dernière, on pourra préférer cette formule quand les tables qu'on emploie ne contiendront pas les sécantes.

Voici une autre manière de conclure la latitude, après avoir déterminé l'angle horaire; car, au lieu de la distance méridienne du soleil au zénith, on pourroit calculer la différence entre cette distance, et la distance au zénith correspondante à l'observation près du midi, ou ce qui revient au même, la différence entre la hauteur méridienne, et la plus grande hauteur observée. La formule $\cos.\,(d \sim l) = \sin.\,a + \sin.\,\mathrm{v}.\,b\cos.\,d\cos.\,l$, donne

$$\cos.\,(d \sim l) - \cos.\,(90^\circ - a) = \sin.\,\mathrm{v}.\,b\cos.\,d\cos.\,l,$$

et par conséquent

$$2\sin.\tfrac{1}{2}\big(90^\circ - a + (d \sim l)\big)\sin.\tfrac{1}{2}\big(90^\circ - a - (d \sim l)\big) = \sin.\mathrm{v}.\,b\cos.\,d\cos.\,l$$

d'où l'on déduit

$$\sin.\tfrac{1}{2}\big(90^\circ - a - (d \sim l)\big) = \cos.\tfrac{1}{2}\big(90^\circ + a + (d \sim l)\big)$$

$$= \frac{\sin.\,\mathrm{v}.\,b\cos.\,d\cos.\,l}{2\sin.\tfrac{1}{2}\big(90^\circ - a + (d \sim l)\big)} = \frac{\sin.^2\tfrac{1}{2}\,b\cos.\,d\cos.\,l}{\sin.\tfrac{1}{2}\big(90^\circ - a + (d \sim l)\big)}$$

ou

$$\sin.\tfrac{1}{2}\left(90^\circ - a - (d \sim l)\right) = \cos.\tfrac{1}{2}\left(90^\circ + a + (d \sim l)\right)$$
$$= \frac{\sin\text{ v. } h \cos. d \cos. l}{2\cos.\frac{1}{2}\left(90^\circ + a - (d \sim l)\right)} = \frac{\sin.^2\frac{1}{2} h \cos. d \cos. l}{\cos.\frac{1}{2}\left(90^\circ + a - (d \sim l)\right)}$$

Après avoir trouvé $90^\circ + a + (d \sim l)$, on déduiroit facilement la distance méridienne $d \sim l$. Avec cette formule, on épargneroit quelques logarithmes, mais l'ensemble des opérations ne seroit pas pour cela plus facile. Je crois donc avantageux de préférer l'expression qui donne directement $d \sim l$, et je supposerai qu'on fasse toujours le calcul par cette méthode.

Si l'on reprend l'équation $\cos. h' \cos. d' \cos. l' = \ldots\ldots\ldots$ $\sin. a' - \sin. d' \sin. l'$, on aura, comme auparavant, $\cos. (d' \sim l') = \sin. a' + \sin.\text{ v. } h' \cos. d' \cos. l'$, ou (en représentant par L′ la latitude calculée du lieu de la plus petite hauteur), $\cos. (d' \sim L') = \sin. a' + \sin.\text{ v. } H' \cos. d' \cos. l'''$. En suivant le procédé ci-dessus, on déduira d'ici quatre formules pour calculer la distance méridienne $d' \sim L'$, relative au lieu de la plus petite hauteur; formules qui sont analogues à celles que nous avons établies pour $d \sim L$ relativement au lieu de la plus grande hauteur.

Mais, le calcul précédent étant fait avec des élémens qui ne sont pas rigoureusement vrais, il faut à présent chercher des moyens pour porter le résultat de la méthode jusqu'au degré d'exactitude qui est nécessaire dans la pratique de la Navigation.

Considérons d'abord le calcul relativement au lieu de la plus grande hauteur.

L'expression employée est

$$\cos. (d \sim L) = \sin. a + \sin.\text{ v. } H \cos. d \cos. l'',$$

où l'' représente la latitude estimée, et H le petit horaire déduit du calcul. Les erreurs de ces quantités seront toujours petites. On pourra donc avoir recours au calcul différentiel pour déterminer leur influence, et l'on aura

$$-\delta(d\sim L)\sin.(d\sim L)=\begin{cases} d\,\text{H}\sin.\,\text{H}\cos.\,d\cos.\,l'' \\ \quad -\delta l''\sin.\,\text{v. H}\cos.d\sin.\,l'' \end{cases}$$

et

$$-\delta(d\sim L)\sin.(d\sim L)=\begin{cases} d\,\text{H.}\sin.\,\text{H}\cos.\,d\cos.\,l''+ \\ \delta l''\cos.\text{H}\cos.d\sin.l''-\delta l''\cos.d.\sin.l'' \end{cases}$$

Mais nous avons trouvé

$$\delta\text{H}=\delta\text{M}=\begin{cases} \dfrac{\Delta\,l\,(\cos.\,b'\tan.\,l''-\tan.\,d)}{2\cos.\,\text{M}\sin.\frac{1}{2}t}+\dfrac{\Delta\,d\,(\cos.\,b'\tan.\,d-\tan.\,l'')}{2\cos.\,\text{M}\sin.\frac{1}{2}t} \\ +\,\delta\,l''\tan.\,l''\tan.\,\text{M} \end{cases}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\delta\text{H}=\delta\text{M}=\begin{cases} \dfrac{\Delta\,l\,(\cos.\,\text{H}'\tan.\,l''-\tan.\,d)}{2\cos.\,\text{M}\sin.\frac{1}{2}t}+\dfrac{\Delta\,d\,(\cos.\,\text{H}'\tan.\,d-\tan.\,l'')}{2\cos.\,\text{M.}\sin.\frac{1}{2}t} \\ +\,\delta\,l''\tan.\,l''\tan.\,\text{M.} \end{cases}$$

Donc, en substituant, et en prenant l'' pour L (car ces quantités ne diffèrent que de peu de chose), il résultera

$$\delta(d\sim L)=\begin{cases} \dfrac{\Delta\,l\sin.\,\text{H.}\cos.\,d\cos.\,l''(\tan.d-\cos.\text{H}'\tan.\,l'')}{2\cos.\,\text{M.}\sin.\frac{1}{2}t\sin.\,(d\sim l'')}+\dfrac{\Delta\,d\sin.\text{H}\cos.\,d\cos.\,l''(\tan.\,l''-\cos.\text{H}'\tan.\,d)}{2\cos.\,\text{M}\sin.\frac{1}{2}t\sin.\,(d\sim l'')} \\ +\,\dfrac{\delta\,l''\cos.\,d\sin.\,l''(\cos.\,\text{M}-\cos.\frac{1}{2}t)}{\cos.\,\text{M}\sin.\,(d\sim l'')} \end{cases}$$

$$\delta(d\sim L)=\begin{cases} \dfrac{\Delta\,l\sin.\,\text{H}\,(\tan.\,d-\cos.\,\text{H}'\tan.\,l'')}{2\cos.\,\text{M}\sin.\frac{1}{2}t\,(\tan.\,d\sim\tan.\,l'')}+\dfrac{\Delta\,d\sin.\,\text{H}\,(\tan.\,l''-\cos.\,\text{H}'\tan.\,d)}{2\cos.\,\text{M}\sin.\frac{1}{2}t\,(\tan.\,d\sim\tan.\,l'')} \\ +\,\dfrac{\delta\,l''(\cos.\,\text{M}-\cos.\frac{1}{2}t)}{\cos.\,\text{M}\,(\tan.\,d\cot.\,l''\sim 1)} \end{cases}$$

$$\delta(d\sim L)=\begin{cases} \dfrac{\Delta\,l\sin.\,\text{H}\,(\tan.\,d\cot.\,l''-\cos.\,\text{H}')}{(\sin.\,\text{H}'-\sin.\,\text{H})(\tan.d\cot.\,l''\sim 1)}+\dfrac{\Delta\,d\sin.\,\text{H}\,(\cot.\,d\tan.\,l''-\cos.\,\text{H}')}{(\sin.\,\text{H}'-\sin.\,\text{H})(\cot.d\tan.\,l''\sim 1)} \\ +\,\dfrac{\delta\,l''(\cos.\,\text{M}-\cos.\frac{1}{2}t)}{\cos.\,\text{M}\,(\tan.\,d\cot.\,l''\sim 1)} \end{cases}$$

Voilà les corrections qu'on doit appliquer à la distance méridienne du soleil au zénith $d\sim$ L. Les mêmes corrections ont lieu aussi pour la latitude calculée L; car $\mp\delta\text{L}=\delta(d\sim\text{L})$. Le signe supérieur, quand le soleil passe par le quart de méridien où se trouve le pole élevé, le signe inférieur dans les autres cas.

A l'aide des expressions ci-dessus, on pourroit former des tables pour avoir facilement les corrections relatives aux variations $\Delta\, l$, $\Delta\, d$; ce qui seroit convenable pour rendre la méthode générale, et très exacte.

A l'égard de la correction relative à $d\, l''$, voici le procédé qui me paroit le plus simple, et le plus expéditif, et par conséquent le plus avantageux pour la pratique. On peut faire le calcul tant pour une latitude supposée l''', que pour une autre latitude l'', de manière que la différence entre l''', et l'' soit peu considérable. Ainsi l'on aura (en représentant la latitude calculée résultante de l'' par L, et la latitude calculée résultante de l''' par L$'$) $\mp \delta\, L = \frac{\delta\, l''\, (\cos. M - \cos. \frac{1}{2}\, t)}{\cos. M\, (\tan. d \cot. l'' \sim 1)}$, et à très peu près

$$\mp \delta L' = \frac{\delta\, l'''\, (\cos. M - \cos. \frac{1}{2} t)}{\cos. M\, (\tan. d \cot. l'' \sim 1)}$$

De là on tire $\quad \delta L : \delta L' :: \delta\, l'' : \delta\, l'''$

par conséquent $(\delta L \mp \delta\, l'') : \delta L :: (\delta L' \mp \delta\, l''') : \delta L'$

et $(\delta L \mp \delta\, l'') \mp (\delta L' \mp \delta\, l''') : (\delta L \mp \delta\, l'') :: (\delta L \mp \delta L') : \delta L$

d'où il résulte $\delta L = \frac{(\delta L \mp \delta\, l'')\, (\delta L \mp \delta L')}{(\delta L \mp \delta\, l'') \mp (\delta L' \mp \delta\, l''')}$

c'est-à dire $\delta L = \frac{(L \sim l'')\, (L \sim L')}{(L' \sim l'') \mp (L' \sim l''')}$.

Expression de la correction qu'on doit appliquer à la latitude calculée L. Le signe supérieur, quand les deux latitudes calculées s'éloignent dans le même sens des respectives latitudes supposées; le signe inférieur, dans le cas contraire.

On pourroit aussi déduire la correction qu'on doit appliquer à la latitude supposée, et l'on auroit $\delta\, l'' = \frac{(L \sim l'')\, (l'' \sim l''')}{(L \sim l'') \mp (L \sim l''')}$.

La manière d'appliquer la correction δ L, ou celle $\delta\, l''$, est évidente, si l'on fait attention que la latitude vraie doit être comprise entre les deux latitudes supposées, ou entre les deux latitudes calculées, dans tous les cas, excepté celui où les deux latitudes calculées s'éloignent dans le même sens des correspondantes latitudes supposées ; et que dans cette circonstance la latitude vraie se trouve près de la latitude supposée (ou calculée) qui différe le moins de sa correspondante latitude calculée (ou supposée).

Pour le calcul relativement au lieu de la petite hauteur, on déduiroit aussi, par un procédé semblable,

$$\mp\delta L'=\delta(d'\sim L')=\begin{cases}\dfrac{\Delta l\,\sin. H'(\cos. H-\tan. d'\cot. l''')}{(\sin.H'-\sin.H)(\tan.d'\cot.l'''\sim 1)}+\dfrac{\Delta d\,\sin. H'(\cos. H-\cot. d'\tan. l''')}{(\sin.H'-\sin.H)(\cot. d'\tan.l'''\sim 1)}\\ +\dfrac{\delta l'''(\cos. M'-\cos. \frac{1}{2}t)}{\cos. M'(\tan. d'\cot. l'''\sim 1)}\end{cases}$$

Expressions auxquelles on peut appliquer ce qui vient d'être dit au sujet des formules analogues que nous avons trouvé pour le lieu de la grande hauteur.

Après avoir établi les formules nécessaires pour calculer la latitude, nous considérerons les erreurs qui peuvent influer dans le résultat, pour déterminer les circonstances favorables à l'usage du problème. Nous examinerons aussi, s'il est indifférent de faire le calcul relativement au lieu de la grande hauteur, ou relativement au lieu de la petite hauteur, ou laquelle de ces deux manières d'opérer est la préférable.

Pour la plus grande facilité des comparaisons, nous représenterons par L la latitude calculée relativement à la grande hauteur, ou à la petite hauteur, et nous employerons les dénominations des élémens vrais, en prenant aussi indistinctement $\delta l''$, ou $\delta l'''$.

L'équation générale qui exprime la rélation entre une erreur commise dans la latitude supposée, et l'erreur résultante dans la latitude calculée, est $\mp\delta L=\frac{\delta l''(\cos. m-\cos. \frac{1}{2}t)}{\cos. m(\tan. d\cot. l\sim 1)}$; ce qui prouve que l'erreur de la latitude calculée n'est pas fort différente, soit qu'on calcule pour le lieu de la grande hauteur, ou de la petite hauteur.

Comme m est plus grand ou plus petit que $\frac{1}{2}t$, selon qu'on a fait les observations du même coté du méridien, ou l'une avant et l'autre après midi, on voit 1°. Que, dans le cas où les observations sont de la même espèce, les erreurs de la latitude supposée, et de la latitude calculée ont le même signe, quand le soleil passe par le quart du méridien où se trouve le pole élevé; et que ces erreurs ont des signes contraires, dans toutes les autres circonstances. 2°. Que la régle inverse a lieu, quand les observations sont de différente espèce.

Supposons qu'on ait commis une petite erreur δt dans l'intervalle. On aura $\delta m - \frac{1}{2}\delta t = \delta h$, et $\delta m + \frac{1}{2}\delta t = \delta h'$; et en reprenant $\sin. m = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \sin. \frac{1}{2} t \cos. d \cos. l}$, et différentiant, $\delta m = \ldots$ $- \frac{1}{2}\delta t \cot. \frac{1}{2} t \tan. m$. Ainsi $\delta h = - \frac{1}{2}\delta t \tan. m \cot. \frac{1}{2} t - \frac{1}{2}\delta t$ et $\delta h' = - \frac{1}{2}\delta t \tan. m \cot. \frac{1}{2} t + \frac{1}{2}\delta t$.

En différentiant l'équation

$$\cos. (d \sim L) = \sin. a + \sin. v. h \cos. d \cos. l$$

on aura

$$\mp \delta L = - \frac{\delta h \sin. h \cos. d \cos. l}{\sin. (d \mp l)}$$

ce qui, en substituant la valeur de δh ci-dessus, donne

$$\mp \delta L = \frac{\frac{1}{2}\delta t \sin h \cos. d \cos. l (\tan. m \cot. \frac{1}{2} t + 1)}{\sin. (d \sim l)}$$

$$\mp \delta L = \frac{\frac{1}{2}\delta t \sin. h \sin. h' \cos. d \cos. l}{\cos. m \sin. \frac{1}{2} t \sin. (d \sim l)}$$

$$\mp \delta L = \frac{\delta t \sin h \sin. h' \cos. d \cos. l}{(\sin. h' - \sin h) \sin. (d \sim l)}$$

$$\mp \delta L = \frac{\delta t \sin. h \sin. h'}{(\sin h' - \sin. h)(\tan. d \sim \tan. l)}$$

$$\mp \delta L = \frac{\delta t}{(\operatorname{cosec.} h - \operatorname{cosec.} h')(\tan. d \sim \tan. l)}$$

Expression de l'influence de l'erreur de l'intervalle, en calculant par la grande hauteur.

En différentiant l'équation

$$\cos.(d \sim \mathrm{L}) = \sin.\, a' + \sin.\,\mathrm{v}.\, b' \cos.\, d \cos.\, l$$

on aura

$$\mp \delta\mathrm{L} = -\delta b' \sin.\, b' \cos.\, d \cos.\, l\,;$$

ce qui, en substituant la valeur de $\delta b'$ ci-dessus, donnera les mêmes expressions qu'on vient de trouver pour $\mp \delta$ L.

On voit donc, que l'influence d'une erreur commise dans l'intervalle est la même dans les deux manières de faire le calcul.

De la formule qui exprime l'influence de l'erreur de la latitude supposée, on déduit

1°. Que, l'erreur de la latitude calculée est nulle quand une des hauteurs observées est la hauteur méridienne. Ainsi, il convient de faire une observation près du midi.

2°. Que, les distances au méridien étant égales, dans les deux cas, l'erreur du résultat sera plus petite si les deux observations sont de différente espèce, que si elles étoient de la même espèce.

3°. Qu'en supposant l'horaire moyen constant, il convient d'augmenter l'intervalle, quand les observations sont de la même espèce, et le diminuer quand les observations sont de différente espèce.

4°. Qu'en supposant un horaire constant, il convient toujours de diminuer l'autre horaire.

5°. Que, les circonstances les moins favorables pour l'usage de la méthode sont celles, où le soleil passe par le zénith, ou près du zénith.

De la formule qui exprime l'influence de l'erreur de l'intervalle $\delta\, t$, on déduit les mêmes conséquences, à l'exception d'une circonstance particulière de la quatrième ; car dans le cas des observations de la même espèce, et en supposant le petit horaire constant, il conviendroit sous ce rapport d'augmenter le grand horaire pour diminuer l'erreur de la latitude calculée.

On doit cependant remarquer que, quoique, en augmentant l'intervalle, l'on diminue l'influence d'une erreur supposée dans cet élément, par un effet de cette même augmentation, on augmente aussi la probabilité de commettre une erreur plus considérable dans la mesure du tems écoulé. Il me paroit, donc, toutes considérations faites, qu'on peut adopter les régles précédentes généralement.

Voyons à présent quelle est l'influence des erreurs qu'on peut commettre dans les hauteurs du soleil.

En différentiant $\sin. m = \frac{\sin. a - \sin. a'}{2 \sin. \frac{1}{2} t \cos. d \cos l'}$, on aura $\delta m = \frac{\delta a \cos. a}{2 \cos. m \sin. \frac{1}{2} t \cos. d \cos. l}$; et par conséquent $\delta h = \frac{\delta a \cos. a}{2 \cos. m \sin. \frac{1}{2} t \cos. d \cos. l}$ ou $\delta h = \frac{\delta a \cos. a}{(\sin. h' - \sin. h) \cos. d \cos. l}$; et $\delta h' = \frac{\delta a \cos. a}{2 \cos. m \sin. \frac{1}{2} t \cos. d \cos. l}$, ou $\delta h' = \frac{\delta a \cos. a}{(\sin. h' - \sin. h) \cos. d \cos. l}$

En différentiant l'équation

$$\cos. (d \sim \text{L}) = \sin. a + \sin. \text{v}. h \cos. d \cos. l,$$

on aura $\mp \delta \text{L} = - \frac{\delta a \cos. a + \delta h \sin. h \cos. d \cos. l}{\sin. (d \sim l)}$;

ce qui, en substituant la valeur de h trouvée ci-dessus, donne $\mp \delta \text{L} = - \frac{\delta a \cos. a \sin. h'}{(\sin. h' - \sin. h) \sin. (d \sim l)}$. Expression de l'erreur résultante de l'erreur commise dans la grande hauteur, en faisant le calcul relativement à cette hauteur.

En prenant l'équation

$$\cos. (d \sim \text{L}) = \sin. a' + \sin. \text{v}. h' \cos. d \cos. l$$

on aura $\mp \delta \text{L} = - \frac{\delta h' \sin. h' \cos. d \cos. l}{\sin. (d \sim l)}$,

et par conséquent $\mp \delta \text{L} = - \frac{\delta a \cos. a \sin. h'}{(\sin. h' - \sin. h) \sin. (d \sim l)}$.

Expression de l'influence d'une erreur commise dans la grande hauteur, en calculant par la petite hauteur.

L'influence d'une erreur δa est donc la même dans les deux manières de faire le calcul.

Si l'on suppose une erreur $\delta a'$ dans la petite hauteur, on trouvera aussi, en suivant le même procédé, $\mp \delta L = \frac{\delta a' \cos. a' \sin. b}{(\sin. b' - \sin. b) \sin. (d \sim l)}$ pour l'expression de l'erreur du résultat, soit qu'on fasse le calcul par la grande hauteur, ou par la petite hauteur.

En supposant la même erreur dans les deux hauteurs, on voit que l'erreur résultante de la grande hauteur, est à l'erreur résultante de la petite hauteur, comme cos. a sin. b', à cos. a' sin. b, ou (parceque nous avons représenté par e l'azimuth correspondant à a, et par e' l'azimuth correspondant à a', et considérant que $\frac{\cos. d \sin. b}{\sin. e} = \cos. a$ et $\frac{\cos. d \sin. b'}{\sin. e'} = \cos. a'$) comme sin. e', à sin. e. Ainsi, l'influence d'une erreur supposée dans les deux hauteurs sera en raison inverse des sinus des azimuths.

La formule $\sin. M = \frac{\cos. \frac{1}{2}(a + a') \sin. \frac{1}{2}(a - a')}{\sin. \frac{1}{2} t \cos. d \cos. l}$ est une équation de condition, qui suppose que la déclinaison du soleil et la latitude géographique sont les mêmes pour les deux observations. Nous avons donné des formules pour corriger le résultat des erreurs qui dérivent de cette fausse supposition dans tous les cas du problème; et ces corrections pourront se trouver facilement à l'aide des expressions établies réduites en tables. Au défaut de ces moyens, on pourra réduire une des hauteurs à celle qu'on auroit observé dans le lieu où l'on a observé l'autre, comme on le pratique ordinairement dans la méthode de Douwes. Mais, quoique l'identité des deux latitudes ait lieu alors, on n'evite pas pour cela l'erreur résultante du changement en déclinaison. Il s'agit à présent d'examiner l'influence de chacune de ces causes.

La correction qu'on doit appliquer à la distance méridienne, ou à la latitude calculée, en raison de la variation de la latitude est $= \frac{\Delta\, l \sin. h\, (\tan. d \cot. l - \cos. h')}{(\sin. h' - \sin. h)(\tan. d \cot. l \sim 1)}$, en calculant par la grande hauteur. Par conséquent, l'erreur qu'on commettra, en négligeant cette correction, sera nulle, ou négligeable, quand on aura fait une observation à midi, ou très près du midi.

La même erreur sera aussi nulle, quand l'observation de la petite hauteur aura été faite dans le premier vertical, car alors $\tan. d \cot. l = \cos. h'$.

En faisant le calcul par la petite hauteur la correction qu'on doit appliquer est $= \frac{\Delta\, l \sin. h' (\cos. h - \tan. d \cot. l)}{(\sin. h' - \sin. h)(\tan. d \cot. l \sim 1)}$. L'erreur qu'on commettra, en la négligeant, ne sera donc pas nulle dans les circonstances générales du problème; car h' aura ordinairement une valeur considérable, et l'égalité $\cos. h = \tan. d \cot. l$ n'aura pas lieu quand on fera l'observation de la grande hauteur près du midi.

L'erreur qui résulte de négliger la variation de la déclinaison est $= \frac{\Delta\, d \sin. h\, (\cot. d \tan. l - \cos. h')}{(\sin. h' - \sin. h)(\cot. d \tan. l \sim 1)}$, en calculant par la grande hauteur; et cette erreur sera nulle, ou négligeable, quand une des observations aura été faite à midi, ou près du midi.

La même erreur deviendra aussi nulle quand l'angle parallactique, ou de variation, à l'instant de l'observation de la petite hauteur, sera droit; car alors $\cot. d \tan. l = \cos. h'$.

L'erreur du résultat, en calculant par la petite hauteur, est $= \frac{\Delta\, d \sin. h' (\cos. h - \cot. d \tan. l)}{(\sin. h' - \sin. h)(\cot. d \tan. l \sim 1)}$. Par où l'on voit, que cette erreur sera plus grande que la précédente dans les circonstances générales du problème.

Ces réflexions rendent préférable le calcul, relativement à la grande hauteur. Elles prouvent aussi, que, quand on aura pris une hauteur près du midi (ce qu'il convient de faire dans tous les cas possibles), on pourra se dispenser de réduire l'une des deux hauteurs à celle qu'on auroit observé dans le lieu où l'on observa l'autre.

Par la même raison, quand on employera la méthode de corriger une des hauteurs, on pourra établir comme principe général, qu'on réduise la petite hauteur à celle qui conviendroit au lieu où l'on a observé l'autre; car les circonstances qui pourroient le modifier ne sont pas assez importantes pour passer par l'inconvénient de compliquer avec des exceptions les règles de la pratique. Cependant, pour examiner toutes les circonstances de cette solution du problème, nous déterminerons les erreurs qui résultent dans la hauteur réduite, des erreurs qui peuvent affecter les élémens qu'on emploie dans la réduction.

Supposons la distance directe entre les lieux des deux observations $= n$, l'angle formé par l'azimuth du soleil et l'aire de vent qui conduit du lieu de la grande hauteur au lieu de l'autre $= r$, et l'angle formé par l'azimuth et l'aire de vent dans le lieu de la petite hauteur $= r'$. On aura n cos. r pour la réduction de la grande hauteur, et n cos. r' pour la réduction de la petite hauteur.

En supposant une certaine erreur dans la mesure de l'aire de vent, on aura pour les erreurs résultantes δa, $\delta a'$ dans les hauteurs, $\delta a = -\delta r\, n \sin. r$, et $\delta a' = -\delta r'\, n \sin. r'$. Mais (en représentant l'erreur de la latitude calculée par $\delta L'$, quand on opère relativement à la petite hauteur), on a trouvé ci-devant $\delta L = \frac{\delta a \cos. a \sin. b'}{(\sin. b' - \sin. b) \sin. (d \sim l)}$, et $\delta L' = \frac{\delta a' \cos. a' \sin. b}{(\sin. b' - \sin. b) \sin. (d \sim l)}$.

Donc, en substituant les expressions précédentes, on déduira

$$\delta L : \delta L' :: \delta r\, n \text{ sin. } r \text{ cos. } a \text{ sin. } b' : \delta r' n \text{ sin } r' \text{ cos. } a' \text{ sin. } b$$

et (parceque l'on suppose $\delta r = \delta r'$)

$$\delta L : \delta L' :: \text{sin. } r \text{ sin. } e' : \text{sin. } r' \text{ sin. } e.$$

Les erreurs qu'on doit craindre de l'usage du Compas dans les observations des azimuths sont comme les tangentes des hauteurs du soleil (voyez le Mémoire de M. BOUGUER, sur les meilleurs moyens d'observer en mer la déclinaison magnétique; *Prix de l'Académie des Sciences de Paris pour* 1731). Faisons donc, pour ce cas, $\delta r = \text{B tan. } a$, et $\delta r' = \text{B tan. } a'$. Par conséquent $\delta a = \delta r\, n \text{ sin. } r = n \text{ B tan. } a \text{ sin } r$, et $\delta a' = \delta r' n \text{ sin. } r' = n \text{ B tan. } a' \text{ sin. } r'$; et, en substituant ces expressions dans les formules ci-dessus, on déduira

$$\delta L : \delta L' :: n \text{ B tan. } a \text{ cos. } a \text{ sin. } r \text{ sin. } b' : n \text{ B tan. } a' \text{ cos. } a' \text{ sin. } r' \text{ sin. } b$$

et $$\delta L : \delta L' :: \text{sin. } a \text{ sin. } r \text{ sin. } b' : \text{sin. } a' \text{ sin. } r' \text{ sin. } b.$$

Pour déterminer l'influence d'une erreur commise dans la distance directe, on a $\delta a = \delta n \text{ cos. } r$, et $\delta a' = \delta n \text{ cos. } r'$; et par conséquent, en substituant dans les formules ci-dessus,

$$\delta L : \delta L :: \delta n \text{ cos. } r \text{ cos. } a \text{ sin. } b' : \delta n \text{ cos. } r' \text{ cos. } a' \text{ sin. } b$$

c'est-à-dire $\delta L : \delta L' :: \text{cos. } r \text{ sin. } e' : \text{cos. } r' \text{ sin. } e.$

Il convient ici de faire une réflexion, par laquelle je terminerai cet article. Les formules que nous avons trouvé pour exprimer l'influence des erreurs sont relatives au résultat qu'on obtient par le calcul d'une latitude supposée. Mais, quand par la méthode ci-dessus, ou par la répétition du calcul, ou par quelque autre procédé, on procure l'identité de la latitude supposée et de la latitude calculée, le cas est différent, et les équations établies ne sauroient donner la valeur exacte de l'erreur du résultat. Si une des données du problème est fausse, on sent, que par la nature de ces espèces de méthodes, il faudra employer aussi une latitude fausse pour compenser cet effet, et la faire convenir avec la latitude calculée. Généralement parlant, on pourroit dire que quand les circonstances seront favorables pour diminuer l'influence de l'erreur de la donnée, l'erreur dans la latitude supposée nécessaire pour produire l'identité sera aussi moins considérable; mais l'expression juste ne sera pas celle que nous avons déduite. Pour trouver les formules qui convienent alors, on devroit suivre un autre procédé, dont je vais donner un exemple, en considérant l'erreur de l'intervalle.

L'erreur de la latitude calculée composée de celles qu'on peut attribuer à l'intervalle, et à la latitude supposée, est

$$\mp \delta L = \frac{\delta l'' (\cos. m - \cos. \tfrac{1}{2} t)}{\cos. m (\tan. d \cot. l \sim 1)} + \frac{\delta t \sin. b \sin. b'}{2 \cos m \sin, \tfrac{1}{2} t (\tan. d \sim \tan. l)}.$$

Mais, pour faire convenir la latitude calculée avec la latitude supposée, il faut que δL soit $= \delta l''$, donc

$$\mp \delta l'' = \frac{\delta l'' \tan. l (\cos. m - \cos. \tfrac{1}{2} t)}{\cos. m (\tan. d \sim \tan. l)} + \frac{\delta t \sin. b \sin. b'}{2 \cos. m \sin. \tfrac{1}{2} t (\tan. d \sim \tan. l)}.$$

Par conséquent,

$$\mp 2 \delta l'' \cos. m \sin. \tfrac{1}{2} t (\tan. d \sim \tan. l) - 2 \delta l'' \tan. l \sin. \tfrac{1}{2} t (\cos. m - \cos. \tfrac{1}{2} t) = \delta t \sin. b \sin. b'$$

c'est-à-dire

$$2 \delta l'' \cos. m \sin. \tfrac{1}{2} t (\tan. l - \tan. d) - 2 \delta l'' \tan. l \sin. \tfrac{1}{2} t (\cos. m - \cos. \tfrac{1}{2} t) = \sin. b \sin. b'$$

d'où l'on déduit $\delta l'' = \dfrac{\delta t \sin. b. \sin. b'}{\tan. l \sin. t - 2 \tan. d \cos. m \sin. \tfrac{1}{2} t}$

ou $\delta l'' = \dfrac{\delta t \sin. b \sin. b'}{\tan. l (\sin. b' \cos. b - \cos. b' \sin. b) - \tan. d (\sin. b' - \sin. b)}$

et finalement $\delta l'' = \dfrac{\delta t}{\tan. l (\cot. b - \cot. b') - \tan. d (\mathrm{cosec}\, b - \mathrm{cosec}.\, b')}$.

Expressions égales à celles qu'on trouve pour la méthode directe.

Nous remarquerons, au reste, que les équations relatives à Δd, et Δl, qui sont celles qu'on doit employer d'une manière absolue, pourront être appliquées immédiatement au résultat du calcul fait par chaque supposition séparément.

Méthode indirecte, en déduisant premièrement le plus grand Angle horaire.

Avec la latitude estimée, et les autres données relatives au lieu de la petite hauteur, on calculera le grand angle horaire (que nous représenterons par H′), par l'une des formules suivantes (Voyez ci-après la démonstration de ces formules),

$$\text{sin. v. } H' = \frac{2 \cos. \frac{1}{2}(D' + l''' + a') \sin. \frac{1}{2}(D + l''' - a)}{\cos. l''' \sin. D'}$$

$$\text{sin. v. } H' = \frac{\sqrt{\text{susin. v. } (D' + l''' + a') \text{ sin. v. } (D' + l''' - a)}}{\cos. l''' \sin. D'}$$

$$\sin. \tfrac{1}{2} H' = \sqrt{\frac{\cos. \frac{1}{2}(D' + l''' + a') \sin. \frac{1}{2}(D' + l''' - a)}{\cos. l''' \sin. D'}}$$

ou par toute autre formule de celles que fournit la Trigonométrie Sphérique pour le calcul de l'angle horaire. Et l'on déduira le petit angle horaire $H = H' \sim t$.

Après avoir déterminé le petit horaire, on conclura la distance méridienne du soleil au zénith, et la latitude, par le moyen des formules que nous avons établi pour la même opération dans la méthode précédente, en employant les données relatives au lieu de la grande hauteur.

On pourra aussi trouver la latitude exacte, en faisant le calcul de cette méthode avec des latitudes supposées un peu différentes des latitudes estimées, imitant le procédé que nous avons expliqué ci-dessus.

Après avoir considéré avec tant de détail la méthode qui précède, nous ne ferons qu'indiquer les formules qu'on pourra tirer des équations fondamentales de celle que nous avons à présent sous les yeux, en y ajoutant seulement quelques réflexions générales.

On aura, pour exprimer la relation entre l'erreur de la latitude estimée et l'erreur résultante dans la latitude calculée,

$$\mp \delta L = \frac{\delta l'' (\sin. H - \sin. t - \tan. d \cot. l'' \sin. H)}{\sin. H' (\tan. d \cot. l'' \sim 1)}$$

$$\mp \delta L = \frac{\delta l'' \left(2 \sin. \tfrac{1}{2} H \cos. \tfrac{1}{2} (H' + t) - \tan. d \cot. l'' \sin. H\right)}{\sin. H' (\tan. d \cot. l'' \sim 1)}$$

On voit par cette expression, que l'erreur du résultat est nulle, ou très petite, quand on observe la grande hauteur à midi, ou près du midi.

De la même formule on peut déduire les circonstances qui sont avantageuses pour que la latitude calculée s'approche de la latitude vraie; mais je ne m'arrêterai pas, à présent, à les énoncer particulièrement.

Si l'on suppose une erreur δt dans l'intervalle, on trouvera que l'erreur résultante dans la latitude calculée est $\mp \delta L = \frac{\delta t \sin. b}{\tan. d \sim \tan. l}$. Cette erreur sera donc nulle, quand on a observé une hauteur à midi. Et l'influence d'une erreur supposée dans l'intervalle sera la même, quels que soient l'intervalle, et la distance à midi de l'observation de la petite hauteur.

L'erreur résultante d'une erreur δa supposée dans la grande hauteur est $\mp \delta L = -\frac{\delta a \cos. a}{\sin. (d \sim l)}$.

Et l'erreur résultante d'une erreur $\delta a'$ supposée dans la petite hauteur

$$\mp \delta L = \frac{\delta a' \cos. a' \sin. b}{\sin. b' \sin. (d \sim l)}.$$

Si l'on fait le calcul de la distance méridienne avec la latitude du lieu où l'on a observé la petite hauteur, au lieu d'employer la latitude correspondante à l'autre hauteur, on commettra une erreur $\mp \delta L = \frac{\Delta l \sin. v. b \sin. l \cos. d}{\sin. (d \sim l)} = \frac{\Delta l \sin. v. b}{\tan. d \cot. l \sim 1}$.

Et si l'on fait le calcul de la distance méridienne avec la déclinaison correspondante à la petite hauteur, on commettra une erreur $\mp \delta L = \frac{\Delta d \text{ sin. v. } h \cos. l \sin. d}{\sin. (d \sim l)} = \frac{\Delta d \text{ sin. v. } h}{\cot. d \tan. l \sim 1}$.

Quand on aura pris une hauteur près du midi, on pourra donc faire tout le calcul, en employant la latitude et la déclinaison correspondantes à la petite hauteur; et le résultat donnera avec assez d'exactitude la latitude du lieu où l'on a observé la grande hauteur.

Je dois rappeller ici la dernière réflexion que nous avons faite par rapport à la méthode précédente, car elle a lieu également pour celle-ci. Pour un plus grand éclaircissement, déduisons la relation entre l'erreur du résultat, et une erreur supposée dans l'intervalle, quand on procure l'identité de la latitude estimée, et de la latitude calculée, en employant les formules de la présente solution.

On aura

$$\mp \delta L = \frac{\delta l''(\sin. h' - \sin. t - \tan. d \cot. l \sin. h)}{\sin. h' (\tan. d \cot. l \sim 1)} + \frac{\delta t \sin. h}{\tan. d \sim \tan. l}$$

D'où, parceque $\delta L = \delta l''$, on déduira

$$\mp \delta l'' \sin. h' (\tan. d \sim \tan. l) - \delta l'' \tan. l (\sin. h' - \sin. t - \tan. d \cot. l \sin. h) = \delta t \sin. h \sin. h'$$

et $$- \delta l'' \tan. d \sin. h' + \delta l'' \tan. l \sin. t + \delta l'' \tan. d \sin. h = \delta t \sin. h \sin. h'$$

$$\delta l'' = \frac{\delta t \sin. h \sin. h'}{\tan. l \sin. t + \tan. d (\sin. h - \sin. h')}$$

$$\delta l'' = \frac{\delta t \sin. h \sin. h'}{\tan. l (\sin. h' \cos. h - \cos. h' \sin. h) - \tan. d (\sin. h' - \sin. h)}$$

$$\delta l'' = \frac{\delta t}{\tan. l (\cot. h - \cot. h') - \tan. d (\operatorname{cosec}. h - \operatorname{cosec}. h')}$$

Expressions égales à celles que nous avons trouvé par les formules des deux méthodes précédentes.

Méthodes indirectes par des Équations relatives à l'Intervalle.

Avec les latitudes estimées, et les données du problème, on pourra calculer le grand angle horaire (ou celui qui répond à la petite hauteur), et le petit horaire (ou celui qui répond à la grande hauteur). En comparant l'intervalle mesuré par la montre avec l'intervalle qui résulte de ces horaires, on aura une différence δt; et de-là on déterminera l'équation qu'on doit appliquer à la latitude supposée, en employant la formule $\delta l'' = \frac{\delta t}{\tan. l'' (\cot. h - \cot. h') - \tan. d\ (\mathrm{cosec.}\ h - \mathrm{cosec.}\ h')}$, qui se réduit à $\delta l'' = \frac{\delta t \sin. h \sin. h'}{\tan. l'' \sin. (h' - h) - 2 \tan. d \sin. \frac{1}{2} (h' - h) \cos. \frac{1}{2} (h' + h)}$,* ou toute autre formule qui donne la relation entre δt, et $\delta l''$.

Voici une autre méthode qui me paroît préférable. Faites le calcul du petit horaire avec deux latitudes supposées L, L′ qui ne diffèrent pas beaucoup de la latitude estimée l'' du lieu où l'on a observé la grande hauteur; et appellons les horaires h, K. Faites aussi le calcul du grand horaire avec deux latitudes supposées qui s'éloignent de la latitude l''', où l'on a observé la petite hauteur, de la même quantité et dans le même sens que L, L′ de l''; et appellons ces horaires h', K′. En représentant

* Mon savant ami le Dr. MASKELYNE a publié depuis très long tems une autre formule qui détermine cette relation en termes des azimuths. En représentant par P l'angle formé par les verticaux de l'astre aux instants des observations, il trouve $\delta l'' = \frac{\delta t \cos. l \sin. e \sin. e'}{\sin. P}$. Notre auteur a déduit cette expression par le moyen des analogies différentielles. Je l'ai demontrée d'une autre manière dans mon Mémoire inseré dans la *Connoîssance des Tems pour* 1793.

La même formule a été consultée pour établir les régles données, premièrement dans le *British Mariner's Guide*, et copiées depuis dans les *Requisite Tables*, et dans d'autres ouvrages, pour choisir les circonstances qui conviennent à l'usage de la méthode de DOUWES.

par t l'intervalle qui résulte de la comparaison de h, et K, par t' l'intervalle qui résulte de la comparaison de h', et K', et par T l'intervalle mesuré par la montre, on aura $\delta L : \delta L' :: \delta t : \delta t'$

et par conséquent $\quad \delta L = \frac{(\delta L \mp \delta L')\,\delta t}{\delta t \mp \delta t'}$

qui se réduit à $\quad \delta L = \frac{(L \sim L')\,(t \sim T)}{t \sim t'}$

C'est l'équation qu'on doit appliquer à la latitude supposée L. La latitude vraie sera comprise, ou non, entre les deux latitudes supposées, selon que les deux intervalles calculés différeront de l'intervalle observé dans des sens opposés, ou dans le même sens. Et dans le dernier cas, la latitude vraie sera plus près de la latitude supposée dont l'intervalle correspondant différera le moins de celui que donne la montre.

Toutes les solutions par des équations relatives à l'intervalle ont, cependant, un grand inconvénient; car elles supposent qu'on connoîsse à quel coté du méridien appartient la plus grande hauteur. Et, comme ce cas douteux arrive précisément quand on a observé près du midi, c'est-à-dire, dans les circonstances les plus favorables pour l'exactitude du résultat, je ne crois pas qu'on puisse adopter dans la pratique ces sortes de procédés, surtout, quand on possède d'autres méthodes, qui réunissent toutes les propriétés réquises.

La Latitude du Lieu, ainsi que la Hauteur, et la Déclinaison d'un Astre étant données, trouver son Angle horaire.

La Trigonométrie Sphérique donne

$$\cos. h = \frac{\sin. a - \sin. d \sin. l}{\cos. d \cos. l}$$

par conséquent

$$\sin.\mathrm{v}.\, h = 1 - \frac{\sin. a - \sin. d \sin. l}{\cos. d \cos. l}$$

$$\text{sin.v.}\, b = \frac{\cos.\, d \cos.\, l + \sin.\, d \sin.\, l - \sin.\, a}{\cos.\, d \cos.\, l}$$

$$\text{sin.v.}\, b = \frac{\cos.\, (d \sim l) - \sin.\, a}{\cos.\, d \cos.\, l}$$

$$\text{sin.v.}\, b = \frac{\cos.\, (d \sim l) - \cos.\, (90^\circ - a)}{\cos.\, d \cos.\, l}$$

$$\text{sin.v.}\, b = \frac{2 \sin.\, \tfrac{1}{2} \left(90^\circ - a + (d \sim l)\right) \sin.\, \tfrac{1}{2} \left(90^\circ - a - (d \sim l)\right)}{\cos.\, d \cos.\, l}$$

Expression propre pour employer les logarithmes sinus-verses, et ceux des doubles-sinus.

On a aussi

$$\text{sin.v.}\, b = \frac{\sqrt{\text{cos.v.}\, \left(a - (d \sim l)\right) \text{cos.v.}\, \left(a + (d \sim l)\right)}}{\cos.\, d \cos.\, l}$$

Pour employer les logarithmes sinus et tangentes, on déduit

$$\sin.\, \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\sin.\, \tfrac{1}{2} \left(90^\circ - a + (d \sim l)\right) \sin.\, \tfrac{1}{2} \left(90^\circ - a - (d \sim l)\right)}{\cos.\, d \cos.\, l}}$$

Cette formule, et l'avant-dernière, ont un avantage assez considérable, quand on emploie des tables, comme celles de Sherwin et de Gardiner, où il faut prendre des parties proportionelles; car elles sont additives pour les sinus et les sécantes, et par conséquent on peut les mettre au dessous des logarithmes correspondants aux arguments les plus proches, et faire ensuite une addition de tous ces nombres.

En employant les tables de Taylor, le calcul seroit un peu plus court par la formule suivante.

$$\sin.\, \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos.\, \tfrac{1}{2} \left(90^\circ + a + (d \sim l)\right) \cos.\, \tfrac{1}{2} \left(90^\circ + a - (d \sim l)\right)}{\cos.\, d \cos.\, l}}$$

Si l'on substitue l'expression de la distance polaire D, au lieu de $90^\circ \sim d$, on aura

$$\sin \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\frac{\cos.\, \tfrac{1}{2}\, (D + l + a) \sin.\, \tfrac{1}{2}\, (D + l - a)}{\cos.\, l \sin.\, D}}$$

Celle-ci est la formule de M. de Borda, qu'on trouve dans différens ouvrages.

La Latitude géographique, ainsi que la Déclinaison, et l'Angle horaire d'un Astre étant donnés, trouver sa Hauteur.

Nous avons trouvé

$$\cos.\,(d \sim l) = \sin.\,a + \sin.\,\text{v.}\,h \cos.\,d \cos.\,l$$

Par conséquent

$$\sin.\,a = \cos.\,(d \sim l) - \sin.\,\text{v.}\,h \cos.\,d \cos.\,l$$

et $$\sin.\,a = \cos.\,(d \sim l)\left(1 - \frac{\sin.\,\text{v.}\,h \cos.\,d \cos.\,l}{\cos.\,(d \sim l)}\right)$$

En faisant donc $\frac{\sin.\,\text{v.}\,h \cos.\,d \cos.\,l}{\cos.\,(d \sim l)} = \sin.\,\text{v.}\,\text{N}$, on aura $\sin.\,a = \cos.\,(d \sim l) \cos.\,\text{N}$.

Et l'on voit, que quand sin. v. N est plus grand que le rayon, l'astre est sous l'horizon, et la hauteur calculée est négative.

Nous avons trouvé aussi

$$\sin.\,\text{v.}\,(d \sim l) = \cos.\,\text{v.}\,a - \sin.\,\text{v.}\,h \cos.\,d \cos.\,l$$

Par conséquent

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2}(d \sim l) = \cos.^2 \tfrac{1}{2}(90^\circ + a) - \sin.^2 \tfrac{1}{2} h \cos.\,d \cos.\,l$$

et $$\cos.\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + a) = \sin.\,\tfrac{1}{2}(d \sim l) \sqrt{1 + \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} h \cos.\,d \cos.\,l}{\sin.^2 \frac{1}{2}(d \sim l)}}$$

En faisant donc $\frac{\sin.\,\frac{1}{2} h \sqrt{\cos.\,d \cos.\,l}}{\sin.\,\frac{1}{2}(d \sim l)} = \tan.\,\text{N}$, on aura

$$\cos.\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + a) = \frac{\sin.\,\frac{1}{2}(d \sim l)}{\cos.\,\text{N}}.$$

De l'équation établie ci-dessus relative à susin. v. $(d \sim l)$ on tire également

$$\text{susin. v.}\,(d \sim l) = \text{sucos. v.}\,a + \sin.\,\text{v.}\,h \cos.\,d \cos.\,l$$

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2}(d \sim l) = \sin.^2 \tfrac{1}{2}(90^\circ + a) + \sin.^2 \tfrac{1}{2} h \cos.\,d \cos.\,l$$

$$\sin.\,\tfrac{1}{2}(90^\circ + a) = \cos.\,\tfrac{1}{2}(d \sim l) \sqrt{1 - \frac{\sin.^2 \frac{1}{2} h \cos.\,d \cos.\,l}{\cos.\,\frac{1}{2}(d \sim l)}}$$

En faisant donc $\frac{\sin.\frac{1}{2}h\sqrt{\cos.d\cos.l}}{\cos.\frac{1}{2}(d\sim l)} = \cos.N$, on aura $\sin.\frac{1}{2}(90^\circ + a) = \cos.\frac{1}{2}(d\sim l)\cos.N$.

Cette formule est plus commode pour la pratique que la précédente relative à $\cos.\frac{1}{2}(90^\circ + a)$. Et toutes les deux sont propres pour faire le calcul par les tables des logarithmes sinus et tangentes.

SECONDE PARTIE.

*La Distance apparente de la Lune au Soleil, ou à une Étoile, et les Hauteurs des deux Astres étant données, trouver leur Distance corrigée des Effets de la Réfraction et de la Parallaxe.**

Les mesures prises par le Bureau des Longitudes de la Grande Bretagne, pour faire calculer et publier un Almanach Nautique, avec les distances de la lune au soleil, et à plusieurs étoiles, forment une époque remarquable dans l'histoire de la Navigation, et l'utilité reconnue de cet établissement fait un grand honneur à la nation qui a fourni par là des moyens de sureté aux Navigateurs de tout le Monde. Quand ces Ephemerides eurent annoncé les élémens nécessaires avec assez d'anticipation et d'exactitude, il devint important de trouver des formules propres pour abréger la réduction des distances lunaires apparentes, afin de les dégager des effets de la réfraction et de la parallaxe. L'Abbé de

* La grande utilité de ce problème a engagé un grand nombre de géometres et d'astronomes à s'en occuper, et l'on doit des solutions à l'Abbé DE LA CAILLE, au Dr. MASKELYNE, au grand EULER, à M. DE BORDA, à M. LEXELL, à M. DE LA GRANGE, à M. FUSS, à M. KRAFFT, à &c. &c. &c. J'ai eu la curiosité de suivre les progrés de ces recherches, mais l'histoire en est trop longue pour l'insérer ici, et je dois la remettre à une autre occasion.

la CAILLE avoit donné une méthode d'approximation; mais elle se borne aux équations qui dépendent des premières dimensions, ce qui n'est pas assez exact pour la pratique. Le Dr. MASKELYNE, à qui l'Astronomie Nautique a tant d'obligations, est le premier qui a perfectionné la solution approchée, en la poussant jusqu'à l'exactitude, et en inventant des formules pour abréger les opérations numériques. On a donné depuis différentes formes aux expressions des corrections qu'on doit appliquer à la distance observée; mais le désir de produire des nouveautés s'est souvent emparé des personnes qui manquoient de tact et de principes, et on les a vu étaler à ce sujet des régles fausses ou inexactes, qui quelquefois ont séduit les Pilotes. Tous ceux qui cultivent l'étude de la Navigation, ont sans doute rencontré des cas pareils, et se sont vu forcés quelques fois d'examiner ces idées empiriques. Quant à moi, le regret du tems que j'ai perdu à considérer chaque solution particulière qui m'a tombé sous les mains, m'a fait penser à la fin à établir des formules générales qui pussent servir de modèle, ou de termes de comparaison, pour déterminer si une méthode quelconque est vraie, ou fausse, ou bien à quel point elle est exacte. Ce projet m'a premièrement engagé dans l'analyse de la solution par approximation; et c'est aussi sous ce point de vue principal que j'ai rédigé cet article de mes Recherches.

On a aussi cherché des méthodes directes pour résoudre ce problème. Mr. DUNTHORNE en publia une de cette espèce dans les *Requisite Tables* de 1767; mais ses opérations exigent l'usage combiné des nombres naturels et artificiels. M. DE BORDA est le premier à qui l'on est redevable d'un procédé direct pour faire ce calcul par le seul moyen des logarithmes. On a depuis proposé quelques autres méthodes; mais ne pouvant pas les detailler ici, je me contenterai de faire ci-après mention des principales.

Je dois remarquer, que je me suis borné aux expressions qu'on peut calculer, soit par les logarithmes, soit par les nombres naturels, et que je ne me suis pas occupé de celles dont les opérations exigeroient la combinaison de ces deux moyens de calcul.

Je donnerai d'abord la théorie générale des méthodes directes, et je m'occuperai ensuite de l'analyse des solutions par approximation.

Soient, pour cette Seconde Partie, *a* la hauteur apparente, et A la hauteur vraie de la lune, *b* la hauteur apparente, et H la hauteur vraie du soleil, ou de l'étoile, *d* la distance apparente, et D la distance vraie des deux astres.

Méthodes Directes.

En représentant par Z l'angle au zénith, formé par les verticaux des deux astres, et considérant le triangle formé par la distance, et les complements des hauteurs apparentes, on aura

$$\text{cos. D} = \text{cos. Z cos. A cos. H} + \text{sin. A sin. H}$$

Et considérant le triangle formé par les élémens vrais

$$\text{cos. Z} = \frac{\text{cos.}\,d - \text{sin.}\,a\ \text{sin.}\,b}{\text{cos.}\,a\ \text{cos.}\,b}$$

Par conséquent, en substituant cette expression dans la première équation, on déduira

$$\text{cos. D} = (\text{cos.}\,d - \text{sin.}\,a\ \text{sin.}\,b)\,\frac{\text{cos. A cos. H}}{\text{cos.}\,a\ \text{cos.}\,b} + \text{sin. A sin. H.}$$

Voilà l'expression générale de la relation entre la distance vraie et les données du problème. Il s'agit de chercher des formules propres pour l'usage des logarithmes, ou des nombres naturels.

La quantité sin. a sin. b est $= -$ cos. $(a+b)$ + cos. a cos. b, ou bien $=$cos.$(a\sim b)$—cos. a cos. b. On pourra, donc, substituer l'une ou l'autre de ces expressions ; et de-là résultent deux suites de transformations de l'équation fondamentale, la première par les sommes, la seconde par les différences. De chaque équation de cos. D on peut aussi conclure une valeur de sin. v. D, et une valeur correspondante de susin. v. D ; car sin. v. D $= 1 -$ cos. D, et susin. v. D $= 1 +$ cos. D; et de cette manière les solutions se ramifient encore en deux autres branches. Nous suivrons cette marche pour parvenir aux formules que nous cherchons.

En substituant la première expression sin. a sin. b $=$ $-$ cos. $(a+b)$ + cos. a cos. b, on aura, par les sommes,

$$\cos.D = \left(\cos.\,d + \cos.(a+b) - \cos.a\cos.b\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} + \sin.A\sin.H.$$

$$\cos.D = \left(\cos.\,d + \cos.(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} - \cos.A\cos.H + \sin.A\sin.H.$$

$$\cos.D = \left(\cos.\,d + \cos.(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} - \cos.(A+H)$$

$$\cos.D = 2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} - \cos.(A+H)$$

Par conséquent

1re Formule.

$$\cos.D = 2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h}\left(1 - \frac{\cos.(A+H)}{2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h}}\right)$$

En faisant, donc,

$$\frac{\cos.(A+H)}{2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h}} = \sin.v.\,N.$$

on aura

$$\cos.D = 2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A.\cos.H}{\cos.a\cos.b}\cos.N.$$

La présente méthode exige quelques modifications, car cos. $(A+H)$ change de signe quand $A+H$ excède 90°. Mais je ne m'arrêterai pas à détailler les distinctions des cas qu'on devroit faire dans cette formule, et dans quelques unes de celles qui y dérivent, car cette seule circonstance suffit pour les abandonner dans la pratique.

De l'expression précédente de cos. D on tire

$$\text{sin.v.}D = \text{susin.v.}(A+H) - 2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}$$

Cette équation fournit les trois formules suivantes.

2me *Formule.*

En faisant

$$2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} = \text{susin.v.}N$$

ou bien,

$$\sqrt{\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}} = \cos.N'$$

on aura $\text{sin.v.}D = \sqrt{\text{sin.v.}(N+A+H)\,\text{sin.v.}\left(N-(A+H)\right)}$

ou $\text{sin.v.}D = 2\sin.\left(N'+\tfrac{1}{2}(A+H)\right)\sin.\left(N'-\tfrac{1}{2}(A+H)\right)$

3me *Formule.*

En faisant

$$2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} = \text{sin.v.}N$$

ou bien,

$$\sqrt{\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}} = \sin.N'$$

on aura $\text{sin.v.}D = \sqrt{\text{susin.v.}(N+A+H)\,\text{susin.v.}\left(N\sim(A+H)\right)}$

ou $\text{sin.v.}D = 2\cos.\left(N'+\tfrac{1}{2}(A+H)\right)\cos.\left(N'\sim\tfrac{1}{2}(A+H)\right)$

4me Formule.

L'équation précédente se réduit à

$$\sin.v.\,D = \text{susin.v.}\,(A+H)\left(1 - \frac{2\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\cos A \cos.H}{\text{susin.v.}\,(A+H)\cos.a\cos.b}\right)$$

En faisant, donc, $\frac{2\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\cos.A\cos.H}{\text{susin.v.}\,(A+H)\cos.a\cos.b} = \cos.N$

on aura $\sin.v.\,D = \text{susin.v.}\,(A+H)\sin.v.\,N.$

5me Formule.

De la même expression de cos. D on déduit aussi

$$\text{susin.v.}D = \sin.v.(A+H) + 2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}$$

$$\text{susin.v.}D = \sin.v.(A+H)\left(1 + \frac{2\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\cos.A\cos.H}{\sin.v.\,(A+H)\cos.a\cos.b}\right)$$

En faisant, donc, $\frac{2\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\cos.A\cos.H}{\sin.v.\,(A+H)\cos.a\cos.b} = \cos.N$

on aura $\text{susin.v.}\,D = \sin.v.\,(A+H)\,\text{susin.v.}\,N.$

Je remarquerai ici, qu'on pourroit substituer dans les formules de ces méthodes $\sqrt{\text{susin.v.}\,(d+a+b)\,\text{susin.v.}\left(d\sim(a+b)\right)}$, à la place de $2\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)$, pour employer les susinus-verses au lieu des cosinus.

En substituant la seconde expression $\cos.(a\sim b)-\cos.a\cos.b = \sin.a\sin.b$, dans la formule fondamentale, on aura par les différences

$$\cos.D = \left(\cos.d - \cos.(a\sim b) + \cos.a\cos.b\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} + \sin.A\sin.H$$

$$\cos.D = \left(\cos.d - \cos.(a\sim b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} + \cos.(A\sim H)$$

$$\cos.D = \cos.(A\sim H) - 2\sin.\tfrac{1}{2}\left(d+(a\sim b)\right)\sin.\tfrac{1}{2}\left(d-(a\sim b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}$$

Par conséquent:

6me Formule.

$$\cos. D = \cos.(A\sim H)\left(1 - \frac{2\sin.\frac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\frac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\cos.A\cos.H}{\cos.(A\sim H)\cos.a\cos.b}\right)$$

En faisant, donc, $\frac{2\sin.\frac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\frac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\cos.A\cos.H}{\cos.(A\sim H)\cos.a\cos.b} = \sin.v.N$

on aura $\cos. D = \cos.(A\sim H)\cos. N.$

Et D sera plus grand ou moindre que 90°, selon que sin.v. N sera plus grand ou plus petit que le rayon.

De l'expression précédente de cos. D on tire ce qui suit.

7me Formule.

$$\sin.v.D = \sin.v.(A\sim H) + 2\sin.\tfrac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\tfrac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos b}$$

$$\sin.v.D = \sin.v.(A\sim H)\left(1 + \frac{2\sin.\frac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\frac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\cos.A\cos.H}{\sin.v.(A\sim H)\cos.a\cos.b}\right)$$

En faisant, donc, $\frac{2\sin.\frac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\frac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\cos.A\cos.H}{\sin.v.(A\sim H)\cos.a\cos.b} = \cos.N$

on aura $\sin.v.D = \sin.v.(A\sim H)\,\mathrm{susin}.v.N.$

De la même expression de cos. D on déduit aussi

$$\mathrm{susin}.v.D = \mathrm{susin}.v.(A\sim H) - 2\sin.\tfrac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\tfrac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}$$

Cette équation fournit les trois formules suivantes.

8me Formule.

En faisant

$$2\sin.\tfrac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\tfrac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b} = \mathrm{susin}.v.N$$

ou bien,

$$\sqrt{\sin.\tfrac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\tfrac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\frac{\cos A\cos H}{\cos.a\cos.b}} = \cos.N'$$

on aura $\mathrm{susin}.v.D = \sqrt{\sin.v.\big(N+(A\sim H)\big)\sin.v.\big(N-(A\sim H)\big)}$

ou $\mathrm{susin}.v.D = 2\sin.\big(N'+\tfrac{1}{2}(A\sim H)\big)\sin.\big(N'-\tfrac{1}{2}(A\sim H)\big)$

9me Formule.

En faisant

$$2\,\sin.\tfrac{1}{2}\left(d+(a\sim b)\right)\,\sin.\tfrac{1}{2}\left(d-(a\sim b)\right)\frac{\cos.A.\cos.H}{\cos.a\cos.b}=\sin.\text{v. N}$$

ou bien,

$$\sqrt{\sin.\tfrac{1}{2}\left(d+(a\sim b)\right)\,\sin.\tfrac{1}{2}\left(d-(a\sim b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}}=\sin.\,N'$$

on aura

$$\text{susinv. D}=\sqrt{\text{susin.v.}\left(N+(A\sim H)\right)\text{susin.v.}\left(N\sim(A\sim H)\right)}$$

$$\text{ou}\quad\text{susin.v. D}=2\cos.\left(N'+\tfrac{1}{2}(A\sim H)\right)\cos.\left(N'\sim\tfrac{1}{2}(A\sim H)\right)$$

10me Formule.

L'équation précédente se réduit à

$$\text{susin.v.D}=\text{susin.v.}(A\sim H)\left(1-\frac{2\sin.\frac{1}{2}\left(d+(a\sim b)\right)\sin.\frac{1}{2}\left(d-(a\sim b)\right)\cos.A\cos.H}{\text{susin.v.}(A\sim H)\cos.a\cos.b}\right)$$

En faisant, donc, $\frac{2\sin.\frac{1}{2}\left(d+(a\sim b)\right)\sin.\frac{1}{2}\left(d-(a\sim b)\right)\cos.A\cos.H}{\text{susin.v.}\ (A\sim H)\ \cos.a\ \cos.b}=\cos.N$

on aura $\quad\text{susin.v. D}=\text{susin.v.}\ (A\sim H)\ \text{sin.v. N.}$

Je remarquerai, qu'on pourroit aussi substituer dans les quatre formules précédentes $\sqrt{\text{sin.v.}\left(d+(a\sim b)\right)\text{sin.v.}\left(d-(a\sim b)\right)}$ au lieu de $2\sin.\tfrac{1}{2}\left(d+(a\sim b)\right)\sin.\tfrac{1}{2}\left(d-(a\sim b)\right)$.

Les formules que nous venons d'établir sont propres pour le calcul par les logarithmes sinus-verses, et l'on pourroit combiner aussi l'usage des logarithmes doubles-sinus. Cherchons à présent des expressions pour employer seulement les logarithmes sinus et tangentes, tels qu'on les trouve dans les Tables de GARDINER et de TAYLOR.

11*me Formule.*

Dans la 1re formule on pourroit faire

$$\sqrt{\frac{\cos.(A+H)}{4\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h}}}=\sin.N$$

pour avoir

$$\cos.D=2\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.h}\cos.2N$$

Mais je dois rappeller ici ce que j'ai dit à l'occasion de la 1re méthode.

12*me Formule.*

En substituant dans la 2me formule $2\sin.^2\frac{1}{2}D=\sin.v.D$, et faisant aussi

$$\sqrt{\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}}=\cos.N'$$

on aura

$$\sin.\tfrac{1}{2}D=\sqrt{\sin.\left(N'+\tfrac{1}{2}(A+H)\right)\sin.\tfrac{1}{2}\left(N'\sim\tfrac{1}{2}(A+H)\right)}$$

13*me Formule.*

En faisant, comme dans la 3me méthode,

$$\sqrt{\cos.\tfrac{1}{2}(d+a+b)\cos.\tfrac{1}{2}\left(d\sim(a+b)\right)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}}=\sin.N'$$

on aura

$$\sin.\tfrac{1}{2}D=\sqrt{\cos.\left(N'+\tfrac{1}{2}(A+H)\right)\cos.\left(N'\sim\tfrac{1}{2}(A+H)\right)}$$

14*me Formule.*

En substituant dans la 4me formule

$2\sin.^2\frac{1}{2}D=\sin.v.D$, et $2\cos.^2\frac{1}{2}(A+H)=\text{susin.v.}(A+H)$, on tire

$$\sin.^2\tfrac{1}{2}D = \cos.^2\tfrac{1}{2}(A+H)\left(1 - \frac{\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}(d\sim(a+b))\cos.A\cos.H}{\cos.^2\frac{1}{2}(A+H)\cos.a\cos.H}\right)$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}D = \cos.\tfrac{1}{2}(A+H)\sqrt{1 - \frac{\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}(d\sim(a+b))\cos.A\cos.H}{\cos.^2\frac{1}{2}(A+H)\cos.a\cos.b}}$$

En faisant, donc,

$$\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}(A+H)}\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}(d\sim(a+b))\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}} = \sin.N$$

on aura $\sin.\tfrac{1}{2}D = \cos.\tfrac{1}{2}(A+H)\cos.N.$

Cette méthode est celle de M. DE BORDA, que les Navigateurs du continent employent avec succès depuis plusieurs années.

15*me Formule.*

De la 5me formule on déduit

$$\cos.\tfrac{1}{2}D = \sin.\tfrac{1}{2}(A+H)\sqrt{1 + \frac{\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}(d\sim(a+b))\cos.A\cos.H}{\sin.^2\frac{1}{2}(A+H)\cos.a\cos.b}}$$

En faisant, donc,

$$\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}(A+H)}\sqrt{\frac{\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\cos.\frac{1}{2}(d\sim(a+b))\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}} = \tan.N$$

on aura $\cos.\tfrac{1}{2}D = \dfrac{\sin.\frac{1}{2}(A+H)}{\cos.N}.$

16*me Formule.*

Par les formules de la 6me méthode on voit, qu'en faisant

$$\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(d+(a\sim b))\sin.\frac{1}{2}(d-(a\sim b))\cos.A\cos.H}{\cos.(A\sim H)\cos.a\cos.b}} = \sin.N$$

on aura $\cos.D = \cos.(A\sim H)\cos.2N.$

Et la distance D sera toujours de la même espèce que l'arc 2 N.

17*me Formule.*

De la 7me formule on déduit

$$\sin.\tfrac{1}{2}D = \sin.\tfrac{1}{2}(A \sim H)\sqrt{1 + \frac{\sin.\frac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\frac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\cos.A\cos.H}{\sin.^2\frac{1}{2}(A\sim H)\cos.a\cos.b}}$$

En faisant, donc,

$$\frac{1}{\sin.\frac{1}{2}(A\sim H)}\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\frac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}} = \tan.N$$

on aura $$\sin.\tfrac{1}{2}D = \frac{\sin.\frac{1}{2}(A\sim H)}{\cos.N}.$$

Le Dr. MASKELYNE nous a donné les régles pratiques de cette méthode dans son Introduction aux Tables des Logarithmes de TAYLOR.

18*me Formule.*

En faisant, comme dans la 8me méthode,

$$\sqrt{\sin.\tfrac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin\tfrac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}} = \cos.N'$$

on aura $$\cos.\tfrac{1}{2}D = \sqrt{\sin.\big(N'+\tfrac{1}{2}(A\sim H)\big)\sin.\big(N'-\tfrac{1}{2}(A\sim H)\big)}$$

19*me Formule.*

En faisant, comme dans la 9me méthode,

$$\sqrt{\sin.\tfrac{1}{2}\big(d+(a\sim b)\big)\sin.\tfrac{1}{2}\big(d-(a\sim b)\big)\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}} = \sin.N'$$

on aura $$\cos.\tfrac{1}{2}D = \sqrt{\cos.\big(N'+\tfrac{1}{2}(A\sim H)\big)\cos.\big(N'-\tfrac{1}{2}(A\sim H)\big)}.$$

Cette méthode est celle de Mr. DUNTHORNE perfectionnée par le Dr. MASKELYNE, dont les régles de calcul se trouvent dans les *Requisite Tables* de 1781.

20me *Formule.*

De la 10me formule on déduit

$$\cos.\tfrac{1}{2}D = \cos.\tfrac{1}{2}(A \sim H)\sqrt{1 - \frac{\sin.\frac{1}{2}(d+(a\sim b))\sin.\frac{1}{2}(d-(a\sim b))\cos.A\cos.H}{\cos.^2\frac{1}{2}(A\sim H)\cos.a\cos.b}}$$

En faisant, donc,

$$\frac{1}{\cos.\frac{1}{2}(A\sim H)}\sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(d+(a\sim b))\sin.\frac{1}{2}(d-(a\sim b))\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}} = \sin.N$$

on aura $\cos.\tfrac{1}{2}D = \cos.\tfrac{1}{2}(A\sim H)\cos.N.$

On remarquera que dans toutes ces formules se trouve la quantité $\frac{\cos.A\cos.H}{\cos.a\cos.b}$, pour laquelle on pourra prendre les différences logarithmiques de DUNTHORNE (Voyez les *Requisite Tables*), au lieu de prendre les quatre logarithmes séparément.

Les méthodes établies pour trouver la demi-distance vraie méritent que nous y fassions quelques reflexions. Les 14me, 15me, 17me, et 20me formules sont les plus commodes; mais on peut demander laquelle d'entre elles est la préférable, ou bien quels sont les avantages ou désavantages de chacune. J'en dirai ici quelques mots, d'autant plus volontiers, que je profiterai de cette occasion pour rectifier quelques opinions prématurées que j'avois eu à ce sujet, faute de l'avoir bien examiné.

La préparation des arguments dans les formules par les sommes est un peu plus courte que dans les formules par les différences; mais cet avantage, à la verité, est très peu considérable, et ne vaut la peine d'y avoir égard, qu'en parité de toutes les autres circonstances.

Il y a deux formules (14me et 20me) où l'on cherche le cosinus de l'angle subsidiaire par le sinus, et deux autres formules (15me et 17me) où l'on cherche ce cosinus par la tangente; il s'agit de déterminer lequel de ces deux moyens est le plus utile, pour l'exactitude du calcul. Dans les formules par les sinus, on peut supposer une erreur dans cos. $\frac{1}{2}$ (A+H), ou cos. $\frac{1}{2}$ (A∼H); mais la quantité cos. $\frac{1}{2}$ (A+H) cos. N, ou cos. $\frac{1}{2}$ (A∼H) cos. N, étant toujours plus petite, l'erreur résultante sera aussi plus petite. La même chose a lieu relativement à l'erreur qu'on peut commettre, en cherchant cos. N par le moyen de sin. N. Au contraire, dans les formules par la tangente, l'erreur de sin. $\frac{1}{2}$ (A+H), ou sin. $\frac{1}{2}$ (A∼H), produit toujours une erreur plus considérable; car $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A+H)}{\cos. N}$, ou $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A\sim H)}{\cos. N}$ est plus grand que sin. $\frac{1}{2}$ (A+H), ou sin. $\frac{1}{2}$ (A∼H); et quant à l'erreur de N, l'effet qui y résulte sera plus grand ou plus petit, selon que $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A+H)}{\cos. N}$, ou $\frac{\sin.\frac{1}{2}(A\sim H)}{\cos. N}$ sera aussi plus grand ou plus petit que cos. N. On voit, donc, que les formules où il n'y a que des sinus sont préférables à celles qui contiennent la tangente de l'angle subsidiaire.

Nous voilà réduits aux formules 14me et 20me, dont l'une donne le sinus, et l'autre le cosinus de la demi-distance. Pour bien faire, il conviendroit d'employer la première quand la distance est moindre de 90°, et la seconde quand la distance excède le quart de cercle. Mais, en cas qu'on veuille adopter l'une d'entre elles, pour en user généralement sans distinction, on apperçoit que la 14me formule est la plus avantageuse; car les distances que donnent les Ephémerides, étant toujours à peu près entre les limites de 20° et 120°, il vaut mieux chercher les sinus compris entre 10° et 60°, que les cosinus correspondans au même espace, ou les sinus d'entre 30° et 80°. La méthode de M. de Borda réunit donc le plus de proprietés utiles, et mérite qu'on la préfère aux autres dans la pratique, quand on se bornera à une seule manière de calcul, comme les Navigateurs ont coutume de faire.

Nous procéderons à présent à établir des formules pour faire le calcul par les sinus naturels.

Faisons la quantité commune $\frac{\cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. b} = 2 \cos. M$, et substituons cette expression dans les formules précédentes. En nous rappellant que $2 \cos. \frac{1}{2}(d + a + b) \cos. \frac{1}{2}\big(d \sim (a+b)\big)$ est $= \cos. d + \cos. (a + b)$, nous aurons, par les sommes, les formules que voici.

21*me Formule.*

L'expression de cos. D se réduit à

$$\cos. D = \begin{cases} \cos. (d + M) + \cos. (d \sim M) + \cos. (a + b + M) \\ + \cos. \big((a + b) \sim M\big) - \cos. (A + H). \end{cases}$$

22*me Formule.*

De l'équation fondamentale des 2me, 3me, et 4me formules on déduit

$$\sin. v. D = \begin{cases} \text{susin. v.} (A + H) - \cos. (d + M) - \cos. (d \sim M) \\ - \cos. (a + b + M) - \cos. \big((a + b) \sim M\big). \end{cases}$$

23*me Formule.*

La formule précédente se réduit à celle-ci

$$\sin. v. D = \begin{cases} \text{susin.v.} (A + H) + \sin.v. (d + M) + \sin.v. (d \sim M) \\ + \sin. v. (a + b + M) + \sin. v. \big((a + b) \sim M\big) - 4. \end{cases}$$

J'ai publié il y a quelque tems cette formule, avec quelques autres notions sur la réduction des distances lunaires.

24me *Formule.*

La même formule donne

$$\text{sin. v. D} = \begin{cases} \text{susin. v. }(\text{A} + \text{H}) - \text{susin. v. }(d + \text{M}) \\ - \text{susin. v. }(d \sim \text{M}) - \text{susin. v. }(a + b + \text{M}) \\ - \text{susin. v. }\big((a + b) \sim \text{M}\big) + 4. \end{cases}$$

25me *Formule.*

La même formule donne aussi

$$\text{sin. v. D} = \begin{cases} - \text{sin.v. }(\text{A}+\text{H}) + \text{sin.v. }(d+\text{M}) + \text{sin.v. }(d\sim\text{M}) \\ + \text{sin.v. }(a+b+\text{M}) + \text{sin.v. }\big((a + b) \sim \text{M}\big) - 2. \end{cases}$$

26me *Formule.*

De la 5me formule, on déduit

$$\text{susin. v. D} = \begin{cases} \text{sin. v. }(\text{A}+\text{H}) + \cos.(d+\text{M}) + \cos.(d\sim\text{M}) \\ + \cos.(a+b+\text{M}) + \cos.\big((a+b)\sim\text{M}\big). \end{cases}$$

27me *Formule.*

La formule précédente se réduit à celle-ci

$$\text{susin. v. D} = \begin{cases} \text{sin.v. }(\text{A}+\text{H}) - \text{sin.v. }(d+\text{M}) - \text{sin.v. }(d\sim\text{M}) \\ - \text{sin.v. }(a+b+\text{M}) - \text{sin.v. }\big((a+b)\sim\text{M}\big) + 4. \end{cases}$$

28me *Formule.*

La même formule donne aussi

$$\text{susin.v. D} = \begin{cases} \text{sin.v. }(\text{A}+\text{H}) + \text{susin.v. }(d+\text{M}) + \text{susin.v. }(d\sim\text{M}) \\ + \text{susin.v. }(a+b+\text{M}) + \text{susin.v. }\big((a+b)\sim\text{M}\big) \\ - 4. \end{cases}$$

29me Formule.

La même formule donne encore

$$\text{susin. v. D} = \begin{cases} -\text{ susin. v. }(A + H) + \text{susin. v. }(d + M) \\ + \text{ susin. v. }(d \sim M) + \text{susin. v. }(a + b + M) \\ + \text{ susin. v. }\big((a + b) \sim M\big) - 2. \end{cases}$$

En faisant la même substitution de 2 cos. M, et en nous rappellant que $2 \sin. \frac{1}{2}\big(d + (a \sim b)\big) \sin. \frac{1}{2}\big(d - (a \sim b)\big)$ est $= \cos. (a \sim b) - \cos. d$, nous aurons, par les différences, les formules qui suivent.

30me Formule.

L'expression de cos. D se convertit en

$$\cos. D = \cos. (A \sim H) + 2 \cos. M \cos. d - 2 \cos. M \cos. (a \sim b)$$

et par conséquent

$$\cos. D = \begin{cases} \cos. (A \sim H) + \cos. (d + M) + \cos. (d \sim M) \\ - \cos. \big((a \sim b) + M\big) - \cos. \big((a \sim b) \sim M\big) \end{cases}$$

31me Formule.

De la 7me formule on déduit

$$\text{sin. v. D} = \begin{cases} \text{sin. v. }(A \sim H) - \cos. (d + M) - \cos. (d \sim M) \\ + \cos. \big((a \sim b) + M\big) + \cos. \big((a \sim b) \sim M\big). \end{cases}$$

Cette formule donne les trois suivantes.

32me Formule.

$$\text{sin. v. D} = \begin{cases} \text{sin. v. }(A \sim H) + \text{sin. v. }(d + M) + \text{sin. v. }(d \sim M) \\ - \text{sin. v. }\big((a \sim b) + M\big) - \text{sin. v. }\big((a \sim b) \sim M\big). \end{cases}$$

Mr. Krafft nous a donné cette formule dans un beau Mémoire qui fait partie des Actes de l'Académie de Petersbourg.

33me. Formule.

$$\text{sin. v. D} = \begin{cases} \text{sin. v.}\,(A \sim H) + \text{sin. v.}\,(d \sim M) + \text{sin. v.}\,(d \sim M) \\ + \text{susin. v.}\Big((a \sim b) + M\Big) + \text{susin. v.}\Big((a \sim b) \sim M\Big) - 4. \end{cases}$$

34me Formule.

$$\text{sin. v. D} = \begin{cases} - \text{susin. v.}\,(A \sim H) - \text{susin. v.}\,(d + M) \\ - \text{susin. v.}\,(d \sim M) + \text{susin. v.}\Big((a \sim b) + M\Big) \\ + \text{susin. v.}\Big((a \sim b) \sim M\Big) + 2. \end{cases}$$

35me Formule.

De l'équation fondamentale des 8me, 9me, et 10me formules on déduit

$$\text{susin. v. D} = \begin{cases} \text{susin. v.}\,(A \sim H) + \cos.\,(d + M) + \cos.\,(d \sim M) \\ - \cos.\Big((a \sim b) + M\Big) - \cos.\Big((a \sim b) \sim M\Big). \end{cases}$$

Cette formule donne les trois suivantes.

36me Formule.

$$\text{susin. v. D} = \begin{cases} \text{susin. v.}\,(A \sim H) - \text{sin. v.}\,(d + M) - \text{sin. v.}\,(d \sim M) \\ + \text{sin. v.}\Big((a \sim b) + M\Big) + \text{sin. v.}\Big((a \sim b) \sim M\Big). \end{cases}$$

37me Formule.

$$\text{susin. v. D} = \begin{cases} \text{susin. v.}\,(A \sim H) + \text{susin. v.}\,(d + M) \\ + \text{susin. v.}\,(d \sim M) + \text{sin. v.}\Big((a \sim b) + M\Big). \\ + \text{sin. v.}\Big((a \sim b) \sim M\Big) - 4 \end{cases}$$

38me Formule.

$$\text{susin. v. D} = \begin{cases} -\ \text{sin. v. } (A \sim H) + \text{susin. v. } (d + M) \\ +\ \text{susin. v. } (d \sim M) + \text{sin. v. } \big((a \sim b) + M\big) \\ +\ \text{sin. v. } \big((a \sim b) \sim M\big) - 2. \end{cases}$$

Les methodes, dont les formules renferment des cosinus, ont l'inconvénient de se diviser en différens cas, selon que les arcs correspondans sont plus ou moins grands que le quart de cercle. Toutes les autres formules admettent des régles constantes, et les 23me, 28me, 33me, et 37me réunissent aussi l'avantage de n'exiger que la simple somme des six sinus-verses ou susinus-verses, pour avoir celui de la distance vraie.

Entre les formules par les sommes, et les formules par les différences, les premières sont préférables; car on peut déduire la somme des hauteurs vraies de la somme des hauteurs apparentes d'une manière très simple; pendant que, pour avoir la différence des hauteurs apparentes, il n'y a pas de meilleur procédé que celui de corriger séparément chaque hauteur apparente, pour faire la soustraction ensuite.

J'ai calculé les sinus-verses naturels pour chaque dix secondes de la demi-circonférence, ainsi qu'une table très complette des angles M. Par ces moyens la réduction des distances lunaires deviendra très commode, en employant celle qu'on jugera convenable des formules précédentes.

Pour rendre les opérations encore plus faciles, j'ai calculé une table à double argument (savoir l'angle M, et un autre angle quelconque) qui donne à la fois la quantité

$$\text{sin. v. } (d + M) + \text{sin. v. } (d \sim M)$$

ou la quantité

$$\text{sin. v. } (d + a + b) + \text{sin. v. } \big((a + b) \sim M\big)$$

Ainsi, pour le calcul de la 23me formule, on réduira les opérations des sinus-verses à la simple somme de trois nombres, et par là on diminuera aussi les opérations préliminaires avec les élémens; car alors il suffira de prendre l'angle auxiliaire (pour argument des nombres sommaires), et de déduire la somme des hauteurs apparentes et des hauteurs vraies.

Voici deux formules par les différences, dont le calcul admet l'application de ces nombres sommaires, quoique d'une manière moins commode que celle de la 23me méthode.

39me Formule.

$$\text{sin. v. D} = \begin{cases} \text{sin.v.}(A \sim H) + \text{sin.v.}(d + M) + \text{sin.v.}(d \sim M) \\ \quad + \text{sin. v.}\Big(180° \sim \big((a \sim b) + M\big)\Big) \\ \quad + \text{sin.v.}\Big(180° - \big((a \sim b) \sim M\big)\Big) - 4. \end{cases}$$

40me Formule.

$$\text{susin. v. D} = \begin{cases} \text{susin. v. }(A \sim H) + \text{sin. v.}\big(180° \sim (d + M)\big) \\ \quad + \text{sin.v.}\big(180° - (d \sim M)\big) + \text{sin.v.}\big((a \sim b) + M\big) \\ \quad + \text{sin.v.}\big((a \sim b) \sim M\big) - 4. \end{cases}$$

Je ne m'arrêterai pas à d'autres transformations qu'on pourroit faire; celles qui viennent d'être établies étant suffisantes pour l'objet que je me suis proposé.

Méthodes d'Approximation.

L'expression du cosinus de la distance vraie en termes des données du problème est, comme nous avons vu ci-dessus,

$$\cos. D = \frac{\cos. d \cos. A \cos. H}{\cos. a \cos. b} - \tan. a \tan. b \cos. A \cos. H + \sin. A \sin. H.$$

Représentons par u la parallaxe moins la réfraction en hauteur de la lune, par v la réfraction moins la parallaxe en hauteur du soleil, ou la simple réfraction de l'étoile, et par δ la correction totale de la distance apparente, telle que $D = d + \delta$.

Il s'agit à présent de trouver la valeur de δ en termes des corrections u, v, et de la distance et des hauteurs apparentes.

On a $A = a + u$, et $H = b - v$; et par conséquent

$$\begin{aligned}
\sin. A &= \sin. a \cos. u + \cos. a \sin. u \\
\cos. A &= \cos. a \cos. u - \sin. a \sin. u \\
\sin. H &= \sin. b \cos. v - \cos. b \sin. v \\
\cos. H &= \cos. b \cos. v + \sin. b \sin. v
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\sin. A \sin. H = \begin{cases} \sin. a \sin. b \cos. u \cos. v + \cos. a \sin. b \sin. u \cos. v \\ - \sin. a \cos. b \cos. u \sin. v - \cos. a \cos. b \sin. u \sin. v \end{cases}$$

$$\cos. A \cos. H = \begin{cases} \cos. a \cos. b \cos. u \cos. v - \sin. a \cos. b \sin. u \cos. v \\ + \cos. a \sin. b \cos. u \sin. v - \sin. a \sin. b \sin. u \sin. v \end{cases}$$

Pour obtenir toute l'exactitude nécessaire, il suffira de porter les approximations jusqu'aux produits du second ordre, ou de deux dimensions des petits élémens u, v, δ. Or, un petit arc et son sinus ne différant entre eux que d'un produit du troisième ordre, on pourra prendre u pour $\sin. u$, et v pour $\sin. v$; mais, comme la différence entre le rayon et le cosinus d'un petit arc va jusqu'au second ordre, on devra substituer $1 - \frac{1}{2} u^2 = \cos. u$, et $1 - \frac{1}{2} v^2 = \cos. v$. En y introduisant ces valeurs, on aura, en négligeant les produits de trois dimensions de u, v (ce que nous ferons aussi par la suite),

$$\sin. A \sin. H = \begin{cases} \sin. a \sin. b + u \cos. a \sin. b - v \sin. a \cos. b \\ - u v \cos. a \cos. b - \tfrac{1}{2} u^2 \sin. a \sin. b - \tfrac{1}{2} v^2 \sin. a \sin. b. \end{cases}$$

$$\cos. A \cos. H = \begin{cases} \cos. a \cos. b - u \sin. a \cos. b + v \cos. a \sin. b \\ - u v \sin. a \sin. b - \tfrac{1}{2} u^2 \cos. a \cos. b - \tfrac{1}{2} v^2 \cos. a \cos. b. \end{cases}$$

et, en substituant ces valeurs dans l'expression de cos. D, et faisant les réductions nécessaires, il résultera

$$\cos. D = \begin{cases} \cos. d + \frac{u \sin. b}{\cos. a} - u \cos. d \tan. a - \frac{v \sin. a}{\cos. b} + v \cos. d \tan. b \\ + \frac{u v (\sin.^2 a - \cos.^2 b - \cos. d \sin. a \sin. b)}{\cos. a \cos. b} - \tfrac{1}{2} u^2 \cos. d - \tfrac{1}{2} v^2 \cos. d. \end{cases}$$

Reprenons à présent $D = d + \delta$, et l'on aura
$\cos. D = \cos. d \cos. \delta - \sin. d \sin. \delta$, ou (parceque $\cos. \delta = 1 - \frac{1}{2} \delta^2$), $\cos. D = \cos. d - \delta \sin. d - \frac{1}{2} \delta^2 \cos. d$, ce qui, étant substitué dans l'équation précédente, donne

$$\delta = \begin{cases} - \frac{u \sin. b}{\cos. a \sin. d} + u \cot. d \tan. a + \frac{v \sin. a}{\cos. b \sin. d} - v \cot. d \tan. b \\ + \frac{u v (\sin.^2 a - \cos.^2 b + \cos. d \sin. a \sin. b)}{\sin. d \cos. a \cos. b} + \tfrac{1}{2} u^2 \cot. d + \tfrac{1}{2} v^2 \cot. d \\ - \tfrac{1}{2} \delta^2 \cot. d. \end{cases}$$

c'est-à-dire,

$$\delta = \begin{cases} - u \left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a} \right) + v \left(\frac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b} \right) \\ + u v \left(\frac{\cos. d \sin. a \sin. b - \sin.^2 a + \cos.^2 b}{\sin. d \cos. a \cos. b} \right) + \tfrac{1}{2} u^2 \cot. d \\ + \tfrac{1}{2} v^2 \cot. d - \tfrac{1}{2} \delta^2 \cot. d. \end{cases}$$

Mais, on voit par cette même formule que (en continuant de négliger les produits de deux dimensions de u, v, δ), l'on a

$$\delta^2 = \begin{cases} u^2 \left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b} \right)^2 \\ - 2 u v \left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a} \right) \left(\frac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b} \right) \end{cases}$$

donc, en substituant dans la formule précédente, il résultera

$$\delta = \begin{cases} -u\left(\dfrac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a}\right) + v\left(\dfrac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b}\right) \\ +uv\left(\dfrac{2\cos. d \sin. a \sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^3 d \cos. a \cos. b}\right) \\ +\frac{1}{2}u^2 \cot. d\left(1 - \left(\dfrac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a}\right)^2\right) \\ +\frac{1}{2}v^2 \cot. d\left(1 - \left(\dfrac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b}\right)^2\right) \end{cases}$$

ou bien,

$$\delta = \begin{cases} -u\left(\dfrac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a}\right) + v\left(\dfrac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b}\right) \\ +uv\left(\dfrac{2\cos. d \sin. a \sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^3 d \cos. a \cos. b}\right) \\ +\frac{1}{2}u^2 \cot. d\left(\dfrac{2\cos. d \sin. a \sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^2 d \cos.^2 a}\right) \\ +\frac{1}{2}v^2 \cot. d\left(\dfrac{2\cos. d \sin. a \sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^2 d \cos.^2 b}\right). \end{cases}$$

Voilà la formule qui exprime généralement les corrections qu'on doit appliquer à la distance apparente d, pour avoir la distance vraie D, ayant égard à toutes les équations qui dérivent de u, v, et des produits du second ordre de ces élémens. On peut, à son aide, prouver l'exactitude d'une méthode d'approximation quelconque. Il ne faut, pour cela, que transformer les expressions des corrections proposées, de manière à les mettre toutes en termes de la distance apparente, des hauteurs apparentes, et des corrections des hauteurs; et les comparer ainsi aux précédentes. Ce procédé m'a été fort utile pour examiner différentes méthodes, et découvrir leurs erreurs: mais je ne m'arrêterai pas, à présent, à ces détails; et pour donner un exemple de l'application de ma formule, je me bornerai à la considération de la solution du Dr. MASKELYNE.

Soient un arc M, tel que tan. M $=$ tan. $\frac{1}{2}(a \sim b)$ cot. $\frac{1}{2}(a+b)$ (c'est le premier arc des préceptes de l'auteur), et un autre arc N, tel que $\tan. N = \tan. M \cot. \frac{1}{2} d$ (c'est le second arc des dits préceptes), et exprimons par R la réfraction qui convient à la hauteur de 45°. La correction totale qu'on doit appliquer à la distance par rapport aux réfractions des deux astres est, selon la méthode dont il s'agit, $= \frac{2 R \tan. 2 M}{\sin. 2 N}$, ou (parceque, en représentant la réfraction en hauteur de l'étoile par r', on a $R = r' \tan. h) = \frac{2 r' \tan. h \tan. 2 M}{\sin. 2 N}$. Réduisons l'expression $\frac{2 R \tan. 2 M}{\sin. 2 N}$ aux termes dont nous avons besoin.

En substituant $\tan. 2 M = \frac{2 \tan. M}{1 - \tan.^2 M}$, et $\sin. 2 N = \frac{2 \tan. N}{1 + \tan.^2 N}$ on aura $\frac{2 R \tan. M (1 + \tan.^2 N)}{\tan. N (1 - \tan.^2 M)}$. Mettons y $\tan. N = \tan. M \cot. \frac{1}{2} d$, et il résultera $\frac{2 R (1 + \tan.^2 M \cot.^2 \frac{1}{2} d)}{\cot. \frac{1}{2} d (1 - \tan.^2 M)}$, qui, en substituant $\tan. M = \tan. \frac{1}{2} (a \sim h) \cot. \frac{1}{2} (a + h)$, se convertit en

$$\frac{2R\left(1+\tan.^2\frac{1}{2}(a\sim h)\cot.^2\frac{1}{2}(a+h)\cot.^2\frac{1}{2}d\right)}{\cot.\frac{1}{2}d\left(1-\tan.^2\frac{1}{2}(a\sim h)\cot.^2\frac{1}{2}(a+h)\right)} = \frac{2R\left(\cos.^2\frac{1}{2}(a\sim h)\sin.^2\frac{1}{2}(a+h)+\sin.^2\frac{1}{2}(a\sim h)\cos.^2\frac{1}{2}(a+h)\cot.^2\frac{1}{2}d\right)}{\cot.\frac{1}{2}d\left(\cos.^2\frac{1}{2}(a\sim h)\sin.^2\frac{1}{2}(a+h)-\sin.^2\frac{1}{2}(a\sim h)\cos.^2\frac{1}{2}(a+h)\right)}$$

ce qui, en substituant

$$\cos.^2 \tfrac{1}{2} (a \sim b) \sin.^2 \tfrac{1}{2} (a + b) = \tfrac{1}{4} (\sin.^2 a + \sin^2 b + 2 \sin. a \sin. b)$$

et

$$\sin.^2 \tfrac{1}{2} (a \sim b) \cos.^2 \tfrac{1}{2} (a + b) = \tfrac{1}{4} (\sin.^2 a + \sin.^2 b - 2 \sin. a. \sin. b),$$

et, faisant les réductions nécessaires, donne

$$\frac{R\left((\sin.^2 a + \sin.^2 b + 2 \sin. a \sin. b) \sin.^2 \frac{1}{2} d + (\sin.^2 a + \sin.^2 b - 2 \sin. a \sin. b) \cot.^2 \frac{1}{2} d\right)}{2 \sin. \frac{1}{2} d \cos. \frac{1}{2} d \sin. a \sin. b}$$

d'où, en mettant $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. d = \sin^2 \frac{1}{2} d$, et $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. d = \cos.^2 \frac{1}{2} d$, on tire $\frac{R (\sin.^2 a + \sin.^2 b - 2 \cos. d \sin. a \sin. b)}{\sin. d \sin. a \sin. b}$.

Cette formule se résout en deux expressions, ou parties,

$$\frac{R (\sin. a - \cos. d \sin. b)}{\sin. d \sin. b}, \text{ et } \frac{R (\sin. b - \cos. d \sin. a)}{\sin. d \sin. a}.$$

Appellons r la réfraction en hauteur de la lune. On aura par la loi des réfractions* $R = r' \tan. b$, ou $R = r \tan. a$. Mettant ces valeurs dans les équations précédentes, elles se réduiront à $\frac{r' (\sin. a - \cos. d \sin. b)}{\sin. d \cos. b}$, et $\frac{r (\sin. b - \cos. d \sin. a)}{\sin. d \cos. a}$; qui expriment les corrections dépendantes de la réfraction de chaque astre.

Soit Q un arc $= N \pm \frac{1}{2} d$ (c'est le troisième arc des préceptes; le signe supérieur quand la hauteur du soleil ou de l'étoile est plus grande que celle de la lune, le signe inférieur dans le cas contraire) et représentons par P la parallaxe† horizontale de la lune. La correction de la distance relative à la parallaxe est, d'après le Dr. MASKELYNE, $= P \sin. a \tan. Q$.

On a $\tan. Q = \tan. (N \pm \frac{1}{2} d) = \frac{\tan. N \pm \tan. \frac{1}{2} d}{1 \mp \tan. N \tan. \frac{1}{2} d}$. Mais $\tan. N = \tan. \frac{1}{2} (a \sim b) \cot. \frac{1}{2} (a + b) \cot. \frac{1}{2} d$, ou . . . . . . $\tan. N = \frac{(\sin. a \sim \sin. b) \cot. \frac{1}{2} d}{\sin. a + \sin. b}$. Donc, en substituant et en faisant les réductions nécessaires, on déduira

$$\tan. Q = \frac{(1 + \cos. d) (\sin. a \sim \sin. b) \pm (1 - \cos. d) (\sin. a + \sin. b)}{2 \sin. d \sin. a}$$

c'est-à-dire, $\tan. Q = \frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \sin. a}$.

Ainsi, la correction relative à la parallaxe est

$$\frac{P \sin. a (\sin. b - \cos. d \sin. a)}{\sin. d \sin. a} = \frac{P (\sin. b - \cos. d \sin. a)}{\sin. d}$$

* Le Dr. MASKELYNE ne néglige pas d'avoir égard aux corrections que demande cette supposition, parceque la loi des réfractions est un peu différente; ce que l'auteur fait par un procédé très simple, qu'il facilite par le moyen des deux Tables subsidiaires.

† C'est à P que le Dr. MASKELYNE applique une équation pour compenser la petite erreur qui résulte de la loi des réfractions adoptée auparavant. Ainsi, au lieu de la parallaxe horizontale, il emploie ce qu'il appelle la *parallaxe horizontale corrigée*.

ce qui, en représentant la parallaxe en hauteur par p, et substituant $P = \frac{p}{\cos. a}$, se réduit à $\frac{p\,(\sin. b - \cos. d \sin. a)}{\sin. d \cos. a}$.

On voit, par les équations ci-dessus, que la correction composée de la parallaxe et de la réfraction de la lune est

$$\frac{p\,(\sin. b - \cos. d \sin. a)}{\sin. d \cos. a} - \frac{r\,(\sin. b - \cos. d \sin. a)}{\sin. d \cos. a} = \frac{(p-r)\,(\sin. b - \cos. d \sin. a)}{\sin. d \cos. a}.$$

Expression identique à celle que nous avons trouvé relativement à u. L'expression $\frac{r'\,(\sin. a - \cos. d \sin. b)}{\sin. d \cos. b}$ convient aussi avec celle qui dérive de v. Il nous reste à examiner les corrections relatives aux produits du second ordre.

En faisant tan. Q tan. $a = \cos. S$ (S est le quatrième arc des dits préceptes), on a pour la troisième correction du Dr. MASKELYNE * $\frac{\left(P - \frac{r}{\cos. a}\right)^2 \cos.^2 a \sin.^2 S}{2 \tan. d}$. Cette expression se convertit en

$$\frac{(P \cos. a - r)^2 \sin.^2 S}{2 \tan. d} = \frac{(p - r)^2 \sin.^2 S}{2 \tan. d}.$$

En prenant la valeur de tan. Q établie ci-dessus, on a

$$\cos. S = \frac{(\sin. b - \cos. d \sin. a) \tan. a}{\sin. d \sin. a} = \frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a},$$ d'où l'on déduit

$$\sin.^2 S = 1 - \cos.^2 S = \frac{2 \cos. d \sin. a \sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^2 d \cos.^2 a};$$

et, en substituant cette expression dans la précédente, il résultera, pour la correction dont il s'agit,

$$\tfrac{1}{2}\,(p - r)^2 \cot. d \left(\frac{2 \cos. d \sin. a \sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^2 d \cos.^2 a}\right).$$

Expression identique à celle que nous avons trouvé relativement à u^2.

La quatrième correction est (en représentant la troisième par m), $= \frac{2 r' m}{\cos. d \cos. b \left(P - \frac{r}{\cos. a}\right)}$; qui en substituant la valeur de m,

* La quantité $P - \frac{r}{\cos. a}$ est ce que l'auteur appelle *parallaxe horizontale diminuée*.

et celle de $P = \frac{p}{\cos. a}$, se réduit à

$$(p - r)\left(\frac{2\cos. d\sin. a\sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^3 d\cos. a\cos. b}\right).$$

Expression identique à celle que nous avons trouvée relativement à $u\,v$.

La cinquième correction est $= \frac{m\,r'^2}{\cos.^2 b\left(P - \frac{r}{\cos. a}\right)}$, qui se réduit facilement à l'expression déduite ci-dessus relativement à v^2.

On voit, par cet examen, que la méthode en question a toute l'exactitude qu'on peut désirer; et c'est la raison qui m'a déterminé à la choisir, entre toutes celles que je connois, pour donner un example satisfaisant et complet de la manière d'employer mes formules dans ces sortes d'analyses.

Je finirai cet article en donnant quelques formules, qu'on pourra employer pour calculer les corrections qu'on doit appliquer à la distance apparente pour avoir la distance vraie.

Reprenons l'equation

$$\delta = \begin{cases} -u\left(\frac{\sin. b - \cos. d\sin. a}{\sin. d\cos. a}\right) + v\left(\frac{\sin. a - \cos. d\sin. b}{\sin. d\cos. b}\right) + uv\left(\frac{2\cos. d\sin. a\sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^3 d\cos. a\cos. b}\right) \\ +\frac{1}{2}u^2\cot. d\left(1 - \left(\frac{\sin. b - \cos. d\sin. a}{\sin. d\cos. a}\right)^2\right) + \frac{1}{2}v^2\cot. d\left(1 - \left(\frac{\sin. a - \cos. d\sin. b}{\sin. d\cos. b}\right)^2\right). \end{cases}$$

On voit facilement que

$$\frac{2\cos. d\sin. a\sin. b + \sin.^2 d - \sin.^2 a - \sin.^2 b}{\sin.^2 d\cos. a\cos. b} = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\sin. b - \cos. d\sin. a}{\sin. d\cos. a}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\sin. a - \cos. d\sin. b}{\sin. d\cos. b}\right)^2\right)}$$

Donc, en substituant cette expression dans la formule précédente, elle se réduit à

$$\delta = \begin{cases} -u\left(\frac{\sin. h - \cos. d\sin. a}{\sin. d\cos. a}\right) + v\left(\frac{\sin. a - \cos. d\sin. h}{\sin. d\cos. h}\right) + \frac{uv}{\sin. d}\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\sin. h - \cos. d\sin. a}{\sin. d\cos. a}\right)^2\right)\left(1 - \left(\frac{\sin. a - \cos. d\sin. h}{\sin. d\cos. h}\right)^2\right)} \\ +\frac{1}{2}u^2\cot. d\left(1 - \left(\frac{\sin. h - \cos. d\sin. a}{\sin. d\cos. a}\right)^2\right) + \frac{1}{2}v^2\cot. d\left(1 - \left(\frac{\sin. a - \cos. d\sin. k}{\sin. d\cos. h}\right)^2\right). \end{cases}$$

Faisons $\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a} = \cos. L$, et $\frac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b} = \cos. S$, (et l'on voit, que L représente l'angle formé par la distance apparente des deux astres et la distance apparente de la lune au zénith, et S l'angle formé de la même manière au lieu apparent du soleil ou de l'étoile), et la formule se convertira en

$$\delta = \begin{cases} - u \cos. L + v \cos. S + u\, v \operatorname{cosec.} d \sin. L \sin. S \\ + \frac{1}{2} u^2 \cot. d \sin.^2 L + \frac{1}{2} v^2 \cot. d \sin.^2 S. \end{cases}$$

Les principales corrections sont $- u \cos. L + v \cos. S$, ou $- u \left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a}\right) + v \left(\frac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b}\right)$. Appellons les Σ, et nous aurons

$$\Sigma = - u \cos. L + v \cos. S$$

$$\Sigma = - u + u \sin. v. L + v - v \sin. v. S$$

$$\Sigma = - u + u (1 - \cos. L) + v - v (1 - \cos. S)$$

$$\Sigma = - u + u \left(1 - \frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a}\right) + v - v \left(1 - \frac{\sin. a - \cos. d \sin. b}{\sin. d \cos. b}\right)$$

$$\Sigma = \begin{cases} - u + u \left(\frac{\sin. d \cos. a + \cos. d \sin. a - \sin. b}{\sin. d \cos. a}\right) \\ + v - v \left(\frac{\sin. d \cos. b + \cos. d \sin. b - \sin. a}{\sin. d \cos. b}\right) \end{cases}$$

$$\Sigma = - u + u \left(\frac{\sin. (d + a) - \sin. b}{\sin. d \cos. a}\right) + v - v \left(\frac{\sin. (d + b) - \sin. a}{\sin. d \cos. b}\right)$$

$$\Sigma = \begin{cases} - u + u \frac{2 \cos. \frac{1}{2} (d + a + b) \sin. \frac{1}{2} (d + a - b)}{\sin. d \cos. a} \\ + v - v \frac{2 \cos. \frac{1}{2} (d + a + b) \sin. \frac{1}{2} (d + b - a)}{\sin. d \cos. b} \end{cases}$$

L'application de ces formules n'exige aucune distinction de cas; car il faudra toujours ajouter à la distance apparente les quantités $v + u \frac{2 \cos. \frac{1}{2} (d + a + b) \sin. \frac{1}{2} (d + a - b)}{\sin. d \cos. a}$, et retrancher la somme $u + v \frac{2 \cos. \frac{1}{2} (d + a + b) \sin. \frac{1}{2} (d + b - a)}{\sin. d \cos. b}$. Les opérations sont d'ailleurs assez faciles, car on n'a besoin de chercher que six logarithmes; le cosinus de $\frac{1}{2}(d+a+b)$ et le sinus de d se trouvant dans les deux expressions qu'on calcule.

Cette méthode me paroit utile, pour le calcul des deux corrections principales. Quant aux autres corrections, je me bornerai à indiquer quelques expressions nouvelles, qui dérivent des précédentes, sans y entrer dans les détails de leurs propriétés particulières.

Représentons la correction relative à u^2 par m. Dans le calcul de la correction relative à u, l'on trouve le logarithme de sin.v. L. En faisant usage des tables des sinus-verses, on pourra, donc, déduire m par l'une des expressions $\frac{1}{2}u^2$ cot. d sin.^{2} L, ou $\frac{1}{2}u^2$ cot. d sin. v. L. susin. v. L.

J'observerai ici que, comme cette formule contient le quarré de l'arc u^2, en parties de la circonférence, il faudra diviser dans le calcul par R″, c'est-à-dire, par la valeur du rayon ou du sinus total, en secondes, pour avoir l'équation aussi en secondes. La même remarque a lieu pour toutes les expressions semblables à la précédente.

Le logarithme de R″ est 5.3144251. Donc, pour le calcul de m par la formule précédente, on pourra se servir du logarithme constant négatif $5.3144251+0.3010300=5.6154551$, ou, ce qui revient au même, du logarithme constant positif 4.3845449.

Si l'on emploie les logarithmes logistiques, ou proportionels pour 3^h ou 10800″, ces logarithmes étant réciproques, on aura pour logarithme constant positif

$$5.3144251+0.3010300-4.0334238=1.5820313.$$

En employant seulement les tables des sinus, on pourra prendre la moitié des quatre logarithmes $\frac{\cos.\frac{1}{2}(d+a+b)\sin.\frac{1}{2}(d+b-a)}{\sin. d \cos. b}$

dans le calcul de la première correction, ce qui donne log. sin. $\frac{1}{2}$L et trouver ensuite m par l'expression $2u^2 \cot. d \sin.^2 \frac{1}{2} L \cos.^2 \frac{1}{2} L$.

Pour le calcul de cette formule, on aura le logarithme constant positif 4.9866049, en employant les logarithmes ordinaires, et 0.9799713, en employant les logarithmes proportionels.

Les formules que nous avons établies fournissent une autre méthode pour déterminer m.

En reprenant $m = \frac{1}{2} u^2 \cot. d \sin. v. L$ susin. v. L, et substituant $2 - \sin. v. L =$ susin. v. L, on déduit

$$m = u^2 \cot. d \sin. v. L - \frac{1}{2} u^2 \cot. d \sin. v.^2 L$$

Or, u sin. v. L n'est autre chose que l'équation . . . .
$u \frac{2 \cos. \frac{1}{2} (d + a + b) \sin. \frac{1}{2} (d + a - b)}{\sin. d \cos. a}$, qu'on calcule pour la correction principale relative à u; donc, en représentant cette équation par μ, on aura

$$m = u \mu \cot. d - \frac{1}{2} \mu^2 \cot. d$$

ou

$$m = \mu \left(u - \frac{1}{2} \mu\right) \cot. d.$$

Cette manière de calculer m est très commode, et je crois qu'on doit surtout la préférer, quand on se bornera à ce dégré d'approximation, qui sera suffisant dans la plupart des circonstances, en négligeant les équations relatives à uv et v^2.

Pour le calcul de $\mu \left(u - \frac{1}{2} \mu\right) \cot. d$, ou de $u^2 \cot. d \sin. v. L$, on aura le logarithme constant positif 4.6855749, en employant les logarithmes ordinaires, et 1.2810013, en employant les logarithmes proportionels. Pour le calcul de $\frac{1}{2} \mu^2 \cot. d$ le logarithme constant positif est 4.3845449 ou 1.5820313.

Représentons par n la correction relative à v^2, et l'on aura de même les expressions suivantes.

$$n = \frac{1}{2} v^2 \cot. d \sin. v. S \text{ susin. v. } S$$

$$n = 2 v^2 \cot. d \sin.^2 \frac{1}{2} S \cos.^2 \frac{1}{2} S.$$

Et, en représentant par π l'équation principale relative à v, c'est-a-dire, $v \frac{2 \cos. \frac{1}{2}(d+a+b) \sin. \frac{1}{2}(d+b-a)}{\sin. d \cos. b}$, on déduira aussi

$$n = v\,\pi \cot. d - \tfrac{1}{2}\pi^2 \cot. d$$

ou

$$n = \pi\,(v - \tfrac{1}{2}\pi) \cot. d.$$

Pour les logarithmes constans, qui conviennent à ces formules, je m'en rapporte à ce que j'ai dit au sujet des corrections relatives à u^2.

Quant à la correction relative à $u\,v$, que nous appellerons ω, on a

$$\omega = \frac{u\,v \sin. L \sin. S}{\sin. d}.$$

Ayant recours aux corrections précédentes, on voit que $u\,v \sin. L \sin. S = 2 \tan. d \sqrt{mn}$; donc, en substituant, il résultera

$$\omega = \frac{2\sqrt{m\,n}}{\cos. d}.$$

De l'expression qui précède, l'on tire celle-ci

$$\omega = \frac{2\sqrt{\mu\,\pi\,(u - \frac{1}{2}\mu)(v - \frac{1}{2}\pi)}}{\sin. d}.$$

De l'expression trouvée $\omega = \frac{u\,v \sin. L. \sin. S}{\sin. d}$, qu'on pourra employer, quand on calculera les autres corrections par les sinus-verses, on déduit $\omega = \frac{4\,u\,v \sin. \frac{1}{2} L \cos. \frac{1}{2} L \sin. \frac{1}{2} S \cos. \frac{1}{2} S}{\sin. d}$, dont on pourra faire usage, quand on calculera seulement par les sinus.

Nous remarquerons, qu'en se bornant à la correction relative à u^2, et négligeant les autres équations qui dépendent des produits de deux dimensions, comme l'on pratique dans quelques méthodes connues, on pourra faire le calcul des deux corrections principales par les formules précédentes, et puis trouver la troisième correction de la manière adoptée par Mr. LYONS, en se servant de la Table XIII. des *Requisite Tables* de 1781. (Mr. LYONS avoit donné cette Table dans l'édition de 1767) Ce procédé seroit très commode et assez exact pour les cas ordinaires, où l'on se contente des méthodes qui ne sont pas rigoureuses. Au reste, le calcul de cette correction par la dernière formule que nous avons donnée, est presque aussi commode, et réunit outre cela l'avantage de ne pas demander des tables subsidiaires.

Remarques générales sur les Méthodes précédentes.

Les méthodes directes par les logarithmes, au moins, les meilleures de cette espèce, procurent la distance réduite, avec exactitude, et suivant des règles constantes. Les opérations sont, d'ailleurs, assez simples, et n'exigent pas un grand nombre de logarithmes. Mais ces avantages se trouvent diminués dans la pratique. En effet, on est obligé d'employer les logarithmes avec plusieurs décimales, ce qui augmente la masse du calcul dans une certaine proportion, et produit d'autres inconvéniens; car on ne peut pas se dispenser de calculer et d'appliquer des parties proportionelles, quand on fait usage des tables ordinaires, et si, pour éviter cette peine, on a recours aux tables qui donnent les logarithmes de seconde en seconde, la facilité qu'elles offrent est moins considérable qu'on ne pourroit le penser, par l'embarras d'un gros volume, où l'on ne laisse pas de perdre du tems à feuilleter, pour trouver l'endroit qu'on cherche.

Les propriétés caractéristiques des méthodes d'approximation sont différentes. Elles sont indirectes, et demandent plus ou moins de distinctions des cas. Les opérations sont, outre cela, longues et complexes, surtout quand on veut arriver à un résultat exact. En revanche, comme ce qu'on calcule n'est pas le total de la distance vraie, mais seulement les corrections qu'on doit appliquer à la distance apparente (quantités qui ne sont pas très considérables), il suffit d'employer les logarithmes avec peu de décimales; et de cette manière on peut faire le calcul avec des tables très courtes, et négliger les parties proportionelles.

Les méthodes par les sinus-verses naturels me paroissent réunir les avantages des deux sortes de procédés que nous venons de considérer, sans être sujettes à leurs inconvéniens. Mais comme l'utilité de ces méthodes dépend des tables que j'ai calculées, et que j'ai annoncées depuis plusieurs années, mais qui ne sont pas encore connues, je crois superflu d'ajouter plus de réflexions à ce sujet; m'en rapportant là-dessus à ce qu'on trouvera dans cet ouvrage, actuellement sous presse, et qui est destiné à faciliter les opérations pratiques.

Méthode pour avoir égard à la Figure elliptique de la Terre.

La figure elliptique de la Terre peut influer de deux manières dans la réduction des distances lunaires. La 1re, en ce que les éphémérides donnant la parallaxe horizontale de la lune pour un lieu particulier du globe, si on l'emploie pour un autre lieu, on commet une erreur qui dépend de la différence des parallaxes qui conviennent aux deux latitudes. La 2de, en ce que la verticale hors de l'équateur et des poles n'aboutissant pas au centre de la Terre, les hauteurs observées ne sont pas celles qu'on prendroit si le globe étoit sphérique. On remédieroit à la première cause, en appliquant à la parallaxe horizontale de la lune tirée des éphémérides, l'équation nécessaire pour la réduire à la situation actuelle du vaisseau. Pour la seconde cause, l'on pourroit appliquer à chaque hauteur observée la correction convénable, qui est égale à l'angle formé par la verticale et le rayon terrestre, multiplié par le cosinus de l'azimuth de l'astre. Mais ce procédé seroit embarrassant, et peu précis; car il exige qu'on prenne les azimuths de la lune et du soleil, en même tems qu'on observe leur distance, et les azimuths donnés par le compas doivent en général être très fautifs. Nous chercherons, donc, des formules pour arriver au même but seulement par le calcul.

Entre les équations précédentes, il n'y a que celle qui dépend de u, où l'influence des causes mentionnées mérite d'être considérée; car la correction v est ordinairement trop petite pour y avoir égard. Nous pourrons aussi négliger dans u la réfraction, en nous bornant à la parallaxe, qui est l'élément le plus considérable. Ainsi l'équation $-u\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a}\right)$, se réduit à $-p\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. a}\right)$, ou $-P\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right)$.

Supposons que P est la parallaxe horizontale équatoriale, et différentions en supposant P, a, b variables. On aura, en considérant que la différentielle de P est constamment négative,

$$\delta P\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right) - P\left(\frac{\delta b \cos. b - \delta a \cos. d \cos. a}{\sin. d}\right)$$

Ce sont les corrections qu'on doit appliquer à la distance vraie calculée par les méthodes ordinaires, où δP exprime la différence entre la parallaxe équatoriale et celle qui convient à la latitude du lieu de l'observation. Il s'agit à présent de déduire des formules propres pour le calcul.

Représentons l'azimuth de la lune (compté depuis le quart de méridien où se trouve le pole élevé) par F, sa déclinaison par B; l'azimuth du soleil ou de l'étoile (comptés de la même manière) par f, sa déclinaison par b; et l'angle de la verticale et du rayon terrestre pour le lieu de l'obsérvation par n. Nous aurons

$$\delta a = -n \cos. F = -n\left(\frac{\sin. B - \sin. l \sin. a}{\cos. l \cos. a}\right)$$

et $$\delta b = -n \cos. f = -n\left(\frac{\sin. b - \sin. l \sin. b}{\cos. l \cos. b}\right)$$

Substituant ces expressions, et faisant la somme des corrections $= \varkappa$, on déduira

$$\varkappa = \delta P\left(\frac{\sin. h - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right) + Pn\left(\frac{\sin. b \cos. h - \sin. l \sin. h \cos. h}{\sin. d \cos. l \cos. h} - \frac{\sin. B \cos. d \cos. a - \sin. l \cos. d \sin. a \cos. a}{\sin. d \cos. l \cos. a}\right)$$

$$\varkappa = \delta P\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right) + Pn\left(\frac{\sin. b - \sin. l \sin. b - \sin. B \cos. d + \sin. l \cos. d \sin. a}{\sin. d \cos. l}\right)$$

$$\varkappa = \delta P\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right) - Pn \tan. l\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right) + Pn\left(\frac{\sin. b - \sin. B \cos. d}{\sin. d \cos. l}\right)$$

$$\varkappa = (\delta P - Pn \tan. l)\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right) + Pn\left(\frac{\sin. b - \sin. B \cos. d}{\sin. d \cos. l}\right).$$

Représentons l'applatissement de la Terre par e, en supposant le demi-diametre de l'équateur $= 1$, et nous aurons $\delta P = Pe \sin.^2 l$, et $n = 2e \sin. l \cos. l$;* ce qui, étant substitué, donne

$$\varkappa = (\delta P - 2\delta P \tan. l \cot. l)\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right) + 2Pe \sin. l\left(\frac{\sin. b - \sin. B \cos. d}{\sin. d}\right)$$

$$\varkappa = -\delta P\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right) + 2Pe \sin. l\left(\frac{\sin. b - \sin. B \cos. d}{\sin. d}\right).$$

* Voici la démonstration.

Représentons le demi-axe terrestre par b, supposant le demi-diametre de l'équateur $= 1$, et l'applatissement $1 - b = e$. Et soit, pour un lieu particulier, l la latitude, r le rayon terrestre, c l'angle formé au centre de la terre par le rayon et le demi-diametre de l'équateur, et n l'angle de la verticale et du rayon terrestre.

On aura (Voyez la *Trigonométrie* de Mr. CAGNOLI) $\tan. c = b^2 \tan. l$. Faisons aussi $\tan. z = b \tan. l$.

On déduira $r^2 = \frac{\cos.^2 z}{\cos.^2 c} = \frac{\sec.^2 c}{\sec.^2 z} = \frac{1 + b^4 \tan.^2 l}{1 + b^2 \tan.^2 l}$. Mais on a, à très peu près, $b^2 = 1 - 2e$, $b^4 = 1 - 4e$, et $1 - r^2 = 2 - 2r$; donc, en substituant, on tirera $2 - 2r = 1 - \frac{1 + b^4 \tan.^2 l}{1 + b^2 \tan.^2 l}$, et $2r = 1 + \frac{1 + b^4 \tan.^2 l}{1 + b^2 \tan.^2 l}$, qui se réduit à $2r = \frac{2e \tan.^2 l}{1 + \tan.^2 l}$ $= \frac{2e \tan.^2 l}{\sec.^2 l} = 2e \sin.^2 l$. Ainsi $1 - r = e \sin.^2 l$, et par conséquent $P - Pr = Pe \sin.^2 l$.

L'angle n est $= l - c$. Par conséquent $\tan. n = \frac{\tan. l - \tan. c}{1 + \tan. l \tan. c} = \frac{\tan. l - b^2 \tan. l}{1 + b^2 \tan.^2 l}$, et substituant $b^2 = 1 - 2e$, on aura $\tan. n = \frac{2e \tan. l}{1 + \tan.^2 l - 2e \tan.^2 l}$, qui se réduit à $\tan. n = \frac{2e \tan. l}{\sec.^2 l} = 2e \sin. l \cos. l$, d'où, parceque n est toujours petit, il résulte $n = 2e \sin. l \cos. l$.

Or, si, dans la réduction de la distance, l'on emploie la parallaxe horizontale pour l'équateur, augmentée de la différence δP entre cette parallaxe et celle qui convient à la latitude du lieu de l'observation, la distance vraie, ainsi calculée, se trouvera corrigée de la quantité $\delta P \left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right)$; car l'équation dépendante de cet élément, sera alors $-(P + \delta P)\left(\frac{\sin. b - \cos. d \sin. a}{\sin. d}\right)$. On pourra, donc, employer la parallaxe préparée de cette manière;* ce qu'on pourra faire très facilement, car si les éphémérides donnent la parallaxe pour un lieu particulier, il suffira d'y ajouter l'équation relative à la latitude de ce lieu, ainsi que l'équation relative au lieu de l'observation.

A la distance obtenue, l'on devra appliquer la quantité $2\, P e \sin. l \left(\frac{\sin. b - \sin. B \cos d}{\sin. d}\right)$. Soit cette équation $= \varepsilon$, et nous aurons

$$\varepsilon = 2\, P e \sin. l \cos. B \left(\frac{\sin. b - \sin. B \cos. d}{\cos. B \sin. d}\right)$$

$$\varepsilon = 2\, P e \sin. l \cos. B \left(1 - 1 + \frac{\sin. b - \sin. B \cos. d}{\cos. B \sin. d}\right)$$

$$\varepsilon = 2\, P e \sin. l \cos. B - 2\, P e \sin. l \cos. B \left(1 + \frac{\sin. B \cos. d - \sin. b}{\cos. B \sin. d}\right)$$

$$\varepsilon = 2\, P e \sin. l \cos. B - 2\, P e \sin. l \left(\frac{\cos. B \sin. d + \sin. B \cos. d - \sin b}{\sin. d}\right)$$

$$\varepsilon = 2\, P e \sin. l \cos. B - 2\, P e \sin. l \left(\frac{\sin. (d + B) - \sin. b}{\sin. d}\right)$$

$$\varepsilon = 2\, P e \sin. l \cos. B - 4\, P e \sin. l \frac{\cos. \frac{1}{2}(d + B + b) \sin. \frac{1}{2}(d + B - b)}{\sin. d}$$

Cette expression a l'avantage de ne demander aucune distinction de cas, car on devra toujours ajouter à la distance cal-

* C'est ainsi que le savant Mr. DE BORDA le pratique, dans la méthode qu'il nous a donnée à ce sujet (voyez son *Traité du Cercle de Reflexion*), et que je n'ai pas manqué de consulter avant de travailler à la rédaction de cet article.

culée l'équation $2 P e \sin. l \cos. B$, et retrancher l'équation $4 P e \sin. l \frac{\cos. \frac{1}{2}(d+B+b) \sin. \frac{1}{2}(d+B-b)}{\sin. d}$; et le résultat restera, ainsi, depouillé des erreurs qui dépendent de l'applatissement de la Terre.

On pourra, dans ces opérations, employer toujours pour P la parallaxe horizontale moyenne, 57', et l'on aura 1.32855 pour le logarithme constant de $2 P e$, et 1.62958 pour le logarithme constant de $4 P e$, en supposant l'applatissement $= \frac{1}{321}$.

Pour faciliter le calcul, j'ai construit deux tables, dont l'une donne l'équation $2 P e \sin. l \cos. B$, et l'autre le logarithme de $4 P e \sin. l$.

On pourroit aussi trouver

$$\varepsilon = -2 P e \sin. l \cos. B + 2 P e \sin. l \cos. B \left(1 + \frac{\sin. b - \sin. B \cos. d}{\cos. B \sin. d}\right)$$

$$\varepsilon = -2 P e \sin. l \cos. B + 2 P e \sin. l \left(\frac{\sin. b + \cos. B \sin. d - \sin. B \cos. d}{\sin. d}\right)$$

$$\varepsilon = -2 P e \sin. l \cos. B + 2 P e \sin. l \left(\frac{\sin. b + \sin. (d-B)}{\sin. d}\right)$$

$$\varepsilon = -2 P e \sin. l \cos. B + 4 P e \sin. l \frac{\sin. \frac{1}{2}(b+d-B) \cos. \frac{1}{2}(b \sim (d-B))}{\sin. d}$$

Si l'on préféroit d'employer les distances au pole élevé, au lieu des déclinaisons des astres, on auroit (en appellant B', et b' les distances polaires correspondantes à B, et b)

$$\varepsilon = -2 P e \sin. l \sin. B' + 4 P e \sin. l \frac{\sin. \frac{1}{2}(d + B' + b') \sin. \frac{1}{2}(d + B' - b')}{\sin. d}.$$

ou bien

$$\varepsilon = 2 P e \sin. l \sin. B' - 4 P e \sin. l \frac{\sin. \frac{1}{2}(b' + (d \sim B')) \sin. \frac{1}{2}(b' - (d \sim B'))}{\sin. d}$$

APPENDICE.

Exemples des calculs de quelques unes des Solutions établies ci-dessus, par les Tables ordinaires.

EXEMPLE I.

Calcul de la Latitude du lieu par deux Hauteurs du Soleil, et l'Intervalle de Tems écoulé entre les Observations.

Observations faites dans l'hémisphère septentrional.

Hauteurs vraies ⊙	Demi-intervalle	Déclinaison ⊙	Distance polaire ⊙
45° 5′ 42″	1^h 30′ = 22° 30′	12° 0′ N	78° 0′
5 36 6			

		L. cos. déclinaison	9.99040		
		L. sin. demi-intervalle	9.58284		
		Somme - -	9.57324	L. sin. A -	21° 58′ 56″
				Dist. polaire	78 0 0
		L. sin. - -	9.91867	Différence	56 1 4
2A - -	43° 57′ 52″	L. sin. demi-intervalle	9.58284		
Petite hauteur	5 36 6	C. l. sin - -	0.15851	2A - -	43 57 52
Grande hauteur	45 5 42	Somme - -	19.66002		
Somme	94 39 40	Demi-somme -	9.83001	L. sin. -	42 32 22
Demi-somme -	47 19 50	L. cos. - -	9.83108		
Différence -	2 14 8	L. sin. - -	8.59115		
		C. l. sin. 2 A -	0.15851		
		C. l. cos. petite hauteur	0.00208		
		Somme - -	18.58282		
		Demi-somme -	9.29141	L. sin. -	11 16 51
Distance polaire	78 0 0	L. sin. - -	9.71509	Différence	31 15 31
Petite hauteur	5 36 6	Demi-l. cos. pet. haut.	4.99896		
Somme (+ 90°)	173 36 6	Demi-l. cos. declin.	4.99520		
Demi-somme	86 48 3	C. sin. - -	0.00068		
		L. sin. N (somme)	9.70993		
		L. cos. N - -	9.93375		
		Différence -	9.93307	L. sin. (B) -	59 0 3
Latitude du lieu (2 B — 90°)		- -		-	28 0 6

EXEMPLE II.

Calcul de la Latitude du lieu par deux Hauteurs du Soleil, et l'Intervalle de Tems écoulé entre les Observations, ayant d'ailleurs la Latitude estimée.

En déduisant premierement l'Angle horaire moyen.

	Hauteurs vraies ☉	Heures des observ.	Lat. estimée	Déclinaison ☉
1re Observation	30° 13′ 14″ - -	7h 32′ 16″		
2de Observation	50 3 55 - -	10 27 48 - - -	56° 29′ S	- 20° 6′ 40″ S
Intervalle -		2 55 32		
Demi-intervalle		1 27 46 = 21° 56′ 30″		

			1re supposition.		2me supposition.
Grande hauteur -	50° 3′ 55″				
Petite hauteur -	30 13 14				
Somme - -	80 17 9				
Demi-somme -	40 8 34	L. cos. - -	9.88334		
Différence - -	9 55 20	L. sin. - -	9.23631		
Demi-intervalle -	21 56 30	C. l. sin. -	0.42752		
Déclinaison - -	20 6 40	C. l. cos. -	0.02732		
		Somme - -	9.57449	- -	9.57449
Latitude estimée (—30′)	55 59 0	C. l. cos. -	0.25225	+ 1°	0.26370
Horaire moyen -	42 8 47	L. sin. (somme)	9.82674	43° 32′ 50″	9.83819
Demi-intervalle -	21 56 30	- - - - - -		21 56 30	
Petit horaire - -	20 12 17	- - - - - -		21 36 20	
Demi-petit horaire -	10 6 8	C. l. sin. -	0.75596	10 48 10	0.72716
		Demi-c. l. cos. decl.	0.01366	- -	0.01366
		Demi-c. l. cos. lat. -	0.12612	- -	0.13185
Demi-(gr. haut. + 90°)	70 1 57	L. sin. - -	9.97308	- -	9.97308
		L. tan. A (somme)	10.86882	- -	10.84575
		L. sin. A -	9.99606	- -	9.99563
Demi-dist. méridienne	18 28 30	L. cos. (différence)	9.97702	18 18 16	9.97745
Distance méridienne	36 57 0	- - - - - -		36 36 32	
Déclinaison - -	20 6 40	- - - - - -		20 6 40	
Latitude calculée -	57 4	- - - - - -		56 43	
Latitude supposée -	55 59	- - - - - -		56 59	
	1 5	- Somme 1° 21′ - -		0 16	
Équation de la deuxième latitude supposée $\frac{16' \times 60'}{81'}$				0 12	
Latitude du lieu - - - - -				56 47	

Remarque. Pour appliquer l'équation trouvée à l'une des latitudes calculées de la manière convenable, afin de déduire la latitude corrigée, on pourra consulter ce qui a été dit ci-dessus dans les pages 60, et 61.

EXEMPLE III.

Calcul de la Latitude du lieu par deux Hauteurs du Soleil, et l'Intervalle de Tems écoulé entre les Observations, ayant d'ailleurs la Latitude estimée.

En déduisant premièrement le grand Angle horaire.

	Hauteurs vraies ☉	Heures des observ.	Lat. estimée	Déclinaison ☉	
1re Observation	68° 29′ 50″ -	11h 30′ 20″,5 -	39° 38′ N - -	20° 41′ 33″ N	
2de Observation	71 9 15 -	12 27 1 - - -	- - -	20 41 7	
Intervalle - - -		0 56 40,5 =	- - - - -	14 10 7,5	
Différence en longitude contractée par le vaisseau entre les observations				0 7 0	à l'ouest
Intervalle preparé pour le calcul - - - - - - -				14 3 7,5	

			1re supposition.		2me supposition.
Petite hauteur -	68° 29′ 50″				
Latitude estimée (—30′)	39 8 0	C. l. cos. -	0.11032	+ 1°	0.11660
Distance polaire -	69 18 27	C. l. sin. -	0.02896	- -	0.02896
Somme - -	176 56 17				
Demi-somme -	88 28 8	L. cos. - -	8.42683	+ 30′	8.25516
Différence - -	19 58 18	L. sin. - -	9.53346	+ 30′	9.54375
		Somme - -	18.09957	- -	17.94447
Demi-grand horaire -	6 26 20	L.sin.(demi-somme)	9.04978	5° 22′ 57″	8.97223
Demi-intervalle -	7 1 34	- - - - - - -		7 1 34	
Demi-petit horaire -	0 35 14	C. l. sin. -	1.98933	1 38 37	1.54238
		Demi-c. l. cos. lat.	0.05516	- -	0.05830
		Demi-c. l. sin. dist. p.	0.01448	- -	0.01448
Demi-(gr. haut. + 90°)	80 34 37	L. sin. - -	9.99410	- -	9.99410
		L. tan. A (somme)	12.05307	- -	11.60926
		L. sin. A -	9.99998	- -	9.99987
Demi-dist. méridienne	9 24 25	L. cos. (différence)	9.99412	9 19 9	9.99423
Distance méridienne -	18 48 50	- - - - - -		18 38 18	
Déclinaison - -	20 41 7	- - - - - -		20 41 7	
Latitude calculée -	39 30	- - - - - -		39 19	
Latitude supposée -	39 5	- - - - - -		40 5	
Différence - -	0 25	- Somme 71′ - -		0 46	
		Équation de la deuxième latitude supposée $\frac{46' \times 60'}{71'}$		0 39	
		Latitude du lieu - - - - - -		39 26	

Remarque. Sur la manière d'appliquer l'équation à la latitude calculée par l'une des suppositions, pour déduire la latitude corrigée, je dois aussi renvoyer ici aux pages 60, et 61.

EXEMPLE IV.

Calcul de l'Angle horaire d'un Astre, par sa Hauteur et sa Déclinaison, et la Latitude du lieu.

Hauteur $45^\circ 21' 54''$. Déclinaison $13^\circ 41' 36''$N. Lat. du lieu $23^\circ 20'$N.

Latitude	$23^\circ\ 20'\ 0''$	C. l. cos.	0.0370551
Déclinaison	13 41 36	C. l. cos.	0.0125045 184
Distance méridienne au zénith	9 38 24		
Complém. de la haut. a 90°	44 38 6		
Somme	54 16 30		
Demi-somme	27 8 15	L. sin.	9.6590246 616
Différence	17 29 51	L. sin.	9.4777409 3408
		Somme	19.1867459
Demi-angle horaire	23 5 2	L. sin. (Demi-somme)	9.5933729
Angle horaire	46 10 4 $= 3^h\ 4'\ 40''\ 16'''$.		

Remarque. Je ne place ici cet exemple que pour en donner un des avantages qu'on peut tirer de disposer les formules de manière à rendre les quantités et leurs variations, ou différences, additives ; en réduisant par ce moyen les opérations à la simple addition totale, et en épargnant la peine d'appliquer séparément les parties proportionelles. Dans le calcul précédent (qui a été fait avec des tables qui donnent les logarithmes de minute en minute), on voit que pour chaque sinus, ou chaque complément arithmétique de cosinus (ou sécante), j'ai pris ce qui convient aux dégrés et aux minutes, et que j'ai écrit dessous les parties proportionelles pour les secondes, afin d'ajouter le tout ensemble.

EXEMPLE V.

Calcul des Équations qu'on doit appliquer à la Distance apparente de la Lune au Soleil, ou à une Étoile, pour avoir la Distance vraie.

Hauteur appar. ⊙ 6° 27′ 34″. Hauteur appar. ☾ 54° 11′ 57″. Distance appar. ⊙ ☾ 108° 42′ 3″.
Correction de la haut. ⊙ 7′ 33″. Correction de la haut. ☾ 31′ 42″. Parallaxe horizontale ☾ 55′ 19″

Distance ⊙ ☾ -	108° 42′ 3″	C. l. sin. -	0.0236	- - - -	0.0236
Hauteur ⊙ - -	6 27 34	C. l. cos. -	0.0028		
Hauteur ☾ - -	54 11 57	C. l. cos. - - - - -		- -	0.2329
Somme - - -	169 21 34				
Demi-somme -	84 40 47	L. cos. - -	8.9669	- - - -	8.9669
Première différence	78 13 13	L. sin. - - - -		- - - -	9.9908
Deuxième différence	30 28 50	L. sin. - -	9.7053		
		L. constant	0.3010	- - - -	0.3010
Correction haut. ⊙	453	L. - - - -	2.6561	C. h. ☾ 1902″ L. - - - -	3.2792
Première équation	45,3	L. (somme)	1.6557	Deux. éq. 622,9. L. (somme)	2.7944

Distance apparente - - - -		- - - - - -		108° 42′ 3″
Correction haut. ☾ - —	31′ 42″	Correction haut. ⊙	+	0 7 33
Première équation - —	45,3	Deuxième équation	+	0 10 22,9
				108 59 58,9
		- - -	—	0 32 27,3
Distance corrigée des équations principales		-		108 27 31,6

Remarque. La distance vraie, selon la méthode de M. DE BORDA, est presque la même (voyez l'exemple dans les Tables de Logarithmes de CALLET), mais, cependant, je déduirai les autres corrections, pour montrer la manière de faire ces calculs.

Correct. haut. ⊙	453″		
Demi-prem. éq.	23	L Prem. éq.	1.6557
Différence - -	430	L. - - -	2.6335
Distance appar. - -		L. cot. -	9.5295
		L. constant	4.6856
Troisième équat.	0,0	L. (somme.)	8.5043(—10)
Troisième équat. - -		Demi-L -	4.2521(— 5)
Quatrième équat. - -		Demi-L -	0.1056
Distance appar. - -		C. l. cos. -	0.4940
		L. constant	0.3010
Cinquième correct.	1,4	L. (somme)	0.1527

Correct. haut. ☾	1902″		
Demi-deux. équat.	311	L. Deux. éq.	2.7944
Différence - -	1591	L. - -	3.2017
Distance appar. - - -		L. cot. - -	9.5295
		L. const. -	4.6856
Quatrième équat.	1,6	L. (somme)	c.2112
Distance précédente -		- - - -	108° 27′ 31″,6
Troisième éq. —0″,0			
Quatrième éq. —1,6			
Cinquième éq. +1,4	-	- - —	0,2
Distance réduite - -		- - -	108 27 31,4

Les équations troisième et quatrième seroient positives, si la distance n'excédoit pas 90°, et c'est la seule distinction de cas qu'il faut faire dans le procédé ci-dessus.

EXEMPLE VI.

Calcul des Équations qu'on doit appliquer à la Distance apparente de la Lune au Soleil, ou à une Étoile, pour avoir la Distance vraie.

En se servant des Requisite Tables.

Hauteur apparente ☾ -	49° 57′	Hauteur apparente ✱ -	64° 19′
Parallaxe horizontale ☾ -	57 8″.	Distance apparente ☾ ✱ -	29 24 46″

Distance -	29° 24′ 46″	L. sin. -	9.6912	- - -	9.6912
Hauteur ☾ -	49 57 0	L. cos. - - - -		- - - -	9.8085
Hauteur ✱ - -	64 19 0	L. cos. - -	9.6369		
Somme - -	143 40 46				
Demi-somme -	71 50 23	L. sec. - -	0.5061	- - -	0.5061
Première différence	21 53 23	L. cosec. -	0.4286		
Deuxième différence	7 31 23	L. cosec. - - - -		- - - - -	0.8833
Correct. de la haut. ✱	0 0 27	L. p. - - -	2.6021	Correct. haut. ☾ 35′ 58″ L. p	0.6994
		L. constant -	9.6990	- - - -	9.6990
Première équation -	0 0 29	L. p. (somme)	2 5639	Deux. éq. 9′ 17″ L. p. (som.)	1.2875
Correct. haut. ☾ -	0 35 58				
Demi-deux. équation	0 4 38	L. p. deux. éq.	1.2875	Distance appar. - -	29° 24′ 46″
Différence -	- 0 31 20	L. p. -	0.7592	Correct. de la haut. ✱ +	0 0 27
		L. tan. distance appar.	9.7512	Deuxième équation +	0 9 17
		L. constant - - -	1.2810		
		L. p. (somme) - - -	3.0789	Troisième équation +	0 0 9
		Correct. de la haut. ☾ —	35′ 58″		29 34 39
		Première équation - —	29	- - - - - —	0 36 27
				Distance réduite - - -	28 58 12

Remarque. Quand la distance excéde 90°, la troisième équation devient négative.

Je ne déduirai pas les autres équations; car le dégré d'approximation du calcul qui précéde est celui que la plupart des Navigateurs estimeront suffisant pour la pratique.

Le même exemple calculé par la méthode de Mr. WITCHELL (voyez les *Requisite Tables)* donne 28° 58′ 11″, pour la distance réduite.

DE MENDOZA Y RIOS.

Londres:
4 Novembre, 1796.

ADDITION.

Contenant une Méthode pour réduire les Distances lunaires. Par Mr. H. Cavendish, *Membre de la Société Royale,* &c.

Mr. Cavendish m'ayant fait l'honneur de me communiquer la méthode qu'il a trouvé pour réduire les distances lunaires, je profite de la permission de ce savant, pour la faire connoître au public, en plaçant ici un extrait de ce qu'il m'a écrit à ce sujet, dans les propres mots de l'auteur.

Extract of a Letter from Henry Cavendish, *Esq. to Mr.* Mendoza y Rios, *January,* 1795.

" The methods in which the whole distance of the moon and star is computed, particularly yours, require fewer operations than those in which the difference of the true and apparent places is found; but yet, as in the former methods, it is necessary either to take proportional parts, or to use very voluminous tables; I am much inclined to prefer the latter. This induced me to try whether a convenient method of the latter kind might not be deduced from the fundamental proposition used in your paper, and I have obtained the following, which has the advantage of requiring only short tables, and wanting only one proportional part to be taken, and I think seems shorter than any of the kind I have met with.

" Let h and H be the apparent and true altitude of the star;

l and L the apparent and true altitude of the moon, g and G the apparent and true distance of the moon and star. Let the sine and cosine of $g = d$ and δ, the sine and cosine of $l = a$ and α, the sine and cosine of $h = b$ and β; and the sine of the actual and mean horizontal parallax $= p$ and π; and let the sine of $\mathrm{L} = a - m + p\,e$, and its cosine $= \alpha\,(1 + \mu - p\,\varepsilon)$ and let the sine of $\mathrm{H} = b - n$, and its cosine $= \beta\,(1 + \nu)$.

"Then the cosine of $\mathrm{G} = \delta(1+\mu-p\,\varepsilon)(1+\nu)+(a-m+p\,e)(b-n)-ab\,(1+\mu-p\,\varepsilon)(1+\nu)$, which equals $\delta+\delta\mu+\delta\nu-\delta p\,\varepsilon+\delta\mu\nu-\delta p\,\varepsilon\nu+ab-bm+bpe-an+nm-npe-ab-\alpha b\mu+abp\varepsilon-ab\nu-ab\mu\nu+ab\nu p\varepsilon=\delta+\delta\mu+\delta\nu-\delta p\varepsilon-bm-ba\mu+bpe+bap\varepsilon-an-ab\nu+nm-npe-ab\mu\nu+ab\nu p\varepsilon+\delta\mu\nu-\delta\pi\varepsilon\nu$.

"To make use of this rule, it must be considered that the quantity $\delta\mu\nu-\delta p\,\varepsilon\nu$ is so small that it may safely be disregarded; but $nm-npe-ab\mu\nu+ab\nu p\varepsilon$, if the altitudes are not more than $5°$, may amount to about $12''$, and therefore ought not to be neglected. The quantity $e+a\varepsilon$ also differs very little from one, but is not quite equal to it. Let therefore a table be made under a double argument, namely, the altitudes of the moon and star, giving the value of . . . . $nm-n\pi e-ab\mu\nu+ab\nu\pi\varepsilon+b\pi e+ba\pi\varepsilon-b\pi$, answering to different values of these altitudes, which call A. Let a second table be made under a double argument, namely, the altitude of the star and the apparent distance of the moon and star, giving the value of $\delta\nu$, which call D. Let a third table be made with the observed altitude for argument, giving the logarithm of $am+a^2\mu$; and let this quantity, answering to the moon's altitude, be called M, and that answering to the star's altitude, N; observing that the same table will do for the moon and star; but a fourth table should be made for the sun, so as to include its parallax; and, lastly, let a fifth table be made, with the moon's altitude for argument, giving the logarithm of $\frac{\varepsilon}{a} - \frac{\mu}{\pi a}$, which call C. Then will $\cos. G = \delta - \delta ap C - \frac{bM}{a} - \frac{aN}{b} + bp + D - A$.

"It must be observed that $\delta ap C = \delta p \varepsilon - \frac{\delta \mu p}{\pi}$, whereas it ought to equal $\delta p \varepsilon - \delta \mu$; but μ cannot exceed 57″, and the horizontal parallax cannot differ from the mean by more than $\frac{1}{15}$ part of the whole; so that the error arising from thence cannot exceed 3″ or 4″. This small error however may be diminished by giving the quantity C for more than one horizontal parallax."

Addition to the foregoing Letter.

"I have procured tables of the above-mentioned kind to be computed, which are intended to be inserted in a work now printing by Mr. Mendoza y Rios. Allowance is made in them for the alteration of the refractive power of the atmosphere, which is done by two new tables, one giving the correction of the logarithms M and N, and the other the sum of the corrections of $\delta \mu$ and $\delta \nu$. Now it must be observed, that the quantities μ and ν vary only from 57″ to 51″; and therefore the corrections of $\delta \mu$ and $\delta \nu$, may, without any material error, be considered as the same at all altitudes; and therefore the sum of the corrections may be comprehended in a table, under a double argument, namely, the refractive power of the atmosphere and the apparent distance.

"In order to avoid as much as possible the inconvenience arising from using negative quantities, or giving different cases, the table D is continued to 125° of apparent distance, and the numbers in the table A are increased by 0,0003, so as to make them always positive; and to compensate this, the numbers in D are increased by 0,0002, and those in the correction of $\delta\mu + \delta\nu$ by 0,0001. It was found proper also to give the table C for four different values of horizontal parallax.

"The above tables are short, and do not require proportional parts to be taken. The only part of the work in which this is wanted, is in finding the angle answering to the natural cosine of the true distance. In finding the natural cosine of the apparent distance this is avoided, by neglecting the odd seconds in working the problem, and adding them to the result."